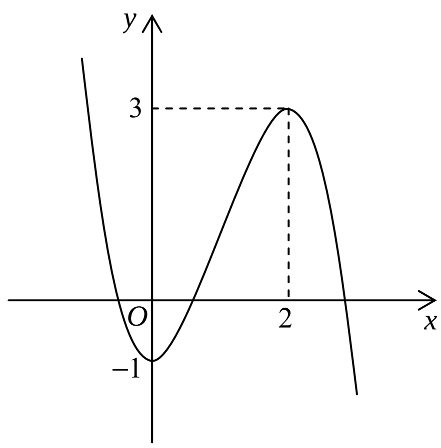
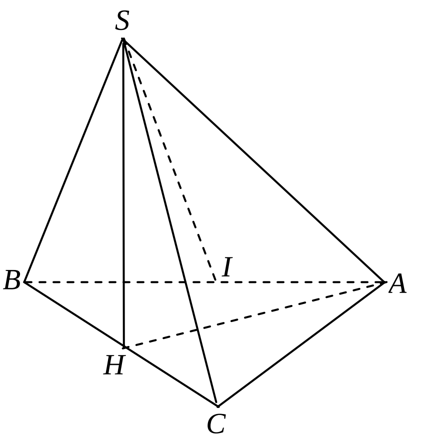
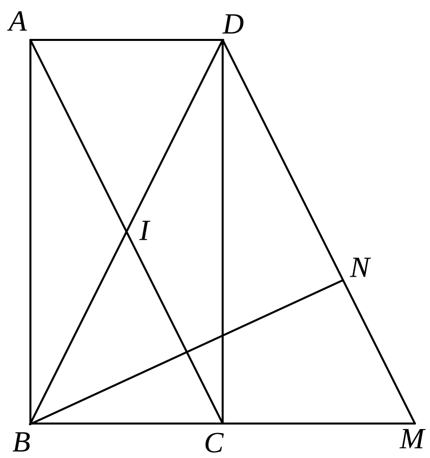
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

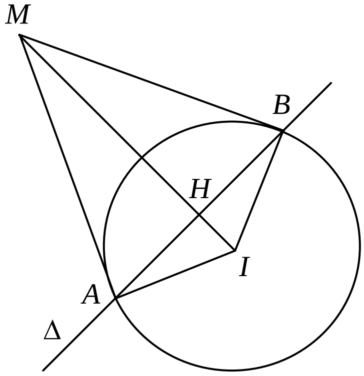
ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM
ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013
Môn: TOÁN; Khối A và khối A1
(Đáp án - thang điểm gồm 04 trang)

Câu	***Đáp án***	***Điểm***
1 **(2,0 *điểm*)**	a. **(1,0 *điểm*)**	
	Khi $m = 0$ ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. • Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.	**0,25**
	Khoảng đồng biến: $(0;\ 2)$; các khoảng nghịch biến: $(-\infty;\ 0)$ và $(2;+\infty)$. - Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -1$; đạt cực đại tại $x = 2$, $y_{CĐ} = 3$. - Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.	**0,25**
	- Bảng biến thiên: $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & 2 & & +\infty \\ \hline y' & & - & 0 & + & 0 & - & \\ \hline y & +\infty & \searrow & -1 & \nearrow & 3 & \searrow & -\infty \end{array}$	**0,25**
	• Đồ thị: 	**0,25**
	b. **(1,0 *điểm*)**	
	Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m$. Hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x > 0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow m \le x^2 - 2x, \forall x > 0$. Xét $f(x) = x^2 - 2x$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.	**0,25**
	Bảng biến thiên: $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & +\infty \end{array}$	**0,25**
	Dựa vào bảng biến thiên ta được giá trị m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $m \le -1$.	**0,25**

Câu	Đáp án	Điểm
2 **(1,0 điểm)**	Điều kiện: $\cos x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $1+\dfrac{\sin x}{\cos x}=2(\sin x+\cos x)$	**0,25**
	$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2\cos x-1)=0.$	**0,25**
	• $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$	**0,25**
	• $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$ Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$	**0,25**
3 **(1,0 điểm)**	$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1)\\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 & (2)\end{cases}$ Điều kiện: $x\geq 1$. Từ (2) ta được $4y=(x+y-1)^2$, suy ra $y\geq 0$.	**0,25**
	Đặt $u=\sqrt[4]{x-1}$, suy ra $u\geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $\sqrt{u^4+2}+u=\sqrt{y^4+2}+y$ (3). Xét $f(t)=\sqrt{t^4+2}+t$, với $t\geq 0$. Ta có $f'(t)=\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}+1>0, \forall t\geq 0.$ Do đó phương trình (3) tương đương với $y=u$, nghĩa là $x=y^4+1$.	**0,25**
	Thay vào phương trình (2) ta được $y(y^7+2y^4+y-4)=0$ (4). Hàm $g(y)=y^7+2y^4+y-4$ có $g'(y)=7y^6+8y^3+1>0$ với mọi $y\geq 0$.	**0,25**
	Mà $g(1)=0$, nên (4) có hai nghiệm không âm là $y=0$ và $y=1$. Với $y=0$ ta được nghiệm $(x;y)=(1;\,0)$; với $y=1$ ta được nghiệm $(x;y)=(2;\,1)$. Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ đã cho là $(1;\,0)$ và $(2;\,1)$.	**0,25**
4 **(1,0 điểm)**	Đặt $u=\ln x,\ \mathrm{d}v=\dfrac{x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x},\ v=x+\dfrac{1}{x}.$	**0,25**
	Ta có $I=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\Big\|_1^2-\displaystyle\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$	**0,25**
	$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\Big\|_1^2-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\Big\|_1^2$	**0,25**
	$=\dfrac{5}{2}\ln 2-\dfrac{3}{2}.$	**0,25**
5 **(1,0 điểm)**	 Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH\perp BC$. Mà (SBC) vuông góc với (ABC) theo giao tuyến BC, nên $SH\perp(ABC)$.	**0,25**
	Ta có $BC=a$, suy ra $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AC=BC\sin 30^{\circ}=\dfrac{a}{2}$; $AB=BC\cos 30^{\circ}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$ Do đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{6}SH.AB.AC=\dfrac{a^3}{16}.$	**0,25**
	Tam giác ABC vuông tại A và H là trung điểm của BC nên $HA=HB$. Mà $SH\perp(ABC)$, suy ra $SA=SB=a$. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra $SI\perp AB$.	**0,25**
	Do đó $SI=\sqrt{SB^2-\dfrac{AB^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{13}}{4}.$ Suy ra $d(C,(SAB))=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}}=\dfrac{6V_{S.ABC}}{SI.AB}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}.$	**0,25**

Câu	Đáp án	Điểm
6 **(1,0 *điểm*)**	Đặt $x=\dfrac{a}{c},\ y=\dfrac{b}{c}$. Ta được $x>0,\ y>0$. Điều kiện của bài toán trở thành $xy+x+y=3$. Khi đó $P=\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}-\sqrt{x^2+y^2}$. Với mọi $u>0,\ v>0$ ta có $u^3+v^3=(u+v)^3-3uv(u+v)\ge(u+v)^3-\dfrac{3}{4}(u+v)^3=\dfrac{(u+v)^3}{4}$. Do đó $\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}\ge 8\left(\dfrac{x}{y+3}+\dfrac{y}{x+3}\right)^3=8\left(\dfrac{(x+y)^2-2xy+3x+3y}{xy+3x+3y+9}\right)^3$.	**0,25**
	Thay $xy=3-x-y$ vào biểu thức trên ta được $\dfrac{32x^3}{(y+3)^3}+\dfrac{32y^3}{(x+3)^3}\ge 8\left(\dfrac{(x+y-1)(x+y+6)}{2(x+y+6)}\right)^3=(x+y-1)^3$. Do đó $P\ge(x+y-1)^3-\sqrt{x^2+y^2}=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2-2xy}=(x+y-1)^3-\sqrt{(x+y)^2+2(x+y)-6}$.	**0,25**
	Đặt $t=x+y$. Suy ra $t>0$ và $P\ge(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$. Ta có $3=x+y+xy\le(x+y)+\dfrac{(x+y)^2}{4}=t+\dfrac{t^2}{4}$ nên $(t-2)(t+6)\ge0$. Do đó $t\ge2$. Xét $f(t)=(t-1)^3-\sqrt{t^2+2t-6}$, với $t\ge2$. Ta có $f'(t)=3(t-1)^2-\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}$. Với mọi $t\ge2$ ta có $3(t-1)^2\ge3$ và $\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2t-6}}=\sqrt{1+\dfrac{7}{(t+1)^2-7}}\le\sqrt{1+\dfrac{7}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, nên $f'(t)\ge3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>0$. Suy ra $f(t)\ge f(2)=1-\sqrt{2}$. Do đó $P\ge1-\sqrt{2}$.	**0,25**
	Khi $a=b=c$ thì $P=1-\sqrt{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $1-\sqrt{2}$.	**0,25**
7.a **(1,0 *điểm*)**	 Do $C\in d$ nên $C(t;-2t-5)$. Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, suy ra I là trung điểm của AC. Do đó $I\left(\dfrac{t-4}{2};\dfrac{-2t+3}{2}\right)$.	**0,25**
	Tam giác BDN vuông tại N nên $IN=IB$. Suy ra $IN=IA$. Do đó ta có phương trình $\left(5-\dfrac{t-4}{2}\right)^2+\left(-4-\dfrac{-2t+3}{2}\right)^2=\left(-4-\dfrac{t-4}{2}\right)^2+\left(8-\dfrac{-2t+3}{2}\right)^2$ $\Leftrightarrow t=1$. Suy ra $C(1;-7)$.	**0,25**
	Do M đối xứng với B qua C nên $CM=CB$. Mà $CB=AD$ và $CM\|\|AD$ nên tứ giác $ACMD$ là hình bình hành. Suy ra $AC\|\|DM$. Theo giả thiết, $BN\perp DM$, suy ra $BN\perp AC$ và $CB=CN$. Vậy B là điểm đối xứng của N qua AC.	**0,25**
	Đường thẳng AC có phương trình: $3x+y+4=0$. Đường thẳng BN qua N và vuông góc với AC nên có phương trình $x-3y-17=0$. Do đó $B(3a+17;\ a)$. Trung điểm của BN thuộc AC nên $3\left(\dfrac{3a+17+5}{2}\right)+\dfrac{a-4}{2}+4=0\Leftrightarrow a=-7$. Vậy $B(-4;-7)$.	**0,25**
8.a **(1,0 *điểm*)**	Δ có véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(-3;-2;1)$.	**0,25**
	(P) qua A và nhận $\vec{u}$ làm véctơ pháp tuyến, nên (P) có phương trình $-3(x-1)-2(y-7)+(z-3)=0\Leftrightarrow 3x+2y-z-14=0$.	**0,25**
	M thuộc Δ nên $M(6-3t;-1-2t;-2+t)$.	**0,25**
	$AM=2\sqrt{30}\Leftrightarrow(6-3t-1)^2+(-1-2t-7)^2+(-2+t-3)^2=120\Leftrightarrow 7t^2-4t-3=0$ $\Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=-\dfrac{3}{7}$. Suy ra $M(3;-3;-1)$ hoặc $M\left(\dfrac{51}{7};-\dfrac{1}{7};-\dfrac{17}{7}\right)$.	**0,25**

Câu	Đáp án	Điểm
9.a **(1,0 *điểm*)**	Số phần tử của S là A_7^3	**0,25**
	$= 210.$	**0,25**
	Số cách chọn một số chẵn từ S là $3.6.5 = 90$ (cách).	**0,25**
	Xác suất cần tính bằng $\dfrac{90}{210} = \dfrac{3}{7}.$	**0,25**
7.b **(1,0 *điểm*)**	 Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và B của (C), H là giao điểm của AB và IM. Khi đó $M(0;t)$, với $t \geq 0$; H là trung điểm của AB. Suy ra $AH = \dfrac{AB}{2} = 2\sqrt{2}.$	**0,25**
	$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AI^2}$, suy ra $AM = 2\sqrt{10}.$ Do đó $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}.$ Mà $MH = d(M,\Delta) = \dfrac{\lvert t \rvert}{\sqrt{2}}$, nên $t = 8.$ Do đó $M(0;\ 8).$	**0,25**
	Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình $x + y - 8 = 0.$ Do đó tọa độ điểm H thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(4;4).$	**0,25**
	Ta có $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2} = \dfrac{1}{4}HM$, nên $\overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{HM}.$ Do đó $I(5;3).$ Vậy đường tròn (C) có phương trình $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10.$	**0,25**
8.b **(1,0 *điểm*)**	(S) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính $R = \sqrt{14}.$	**0,25**
	$d(I,(P)) = \dfrac{\lvert 2.1 + 3(-2) + 1.1 - 11 \rvert}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = R.$ Do đó (P) tiếp xúc với (S).	**0,25**
	Gọi M là tiếp điểm của (P) và (S). Suy ra M thuộc đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Do đó $M(1+2t;-2+3t;1+t).$	**0,25**
	Do M thuộc (P) nên $2(1+2t) + 3(-2+3t) + (1+t) - 11 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$ Vậy $M(3;1;2).$	**0,25**
9.b **(1,0 *điểm*)**	$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$	**0,25**
	$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).$	**0,25**
	Suy ra $z^5 = 2^5\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right) = 16(1 - \sqrt{3}i).$	**0,25**
	Do đó $w = 16(\sqrt{3}+1) + 16(1-\sqrt{3})i.$ Vậy w có phần thực là $16(\sqrt{3}+1)$ và phần ảo là $16(1-\sqrt{3}).$	**0,25**

------------- Hết -------------