CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.1. Giới thiệu

2.2. Phân tích chức năng

2.3. Phân tích vật lý

2.4. Phân tích toán học

2.5 Một số ví dụ

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.1. GiỚI THIỆU

Mô hình hóa là phương pháp xây dựng mô hình toán của hệ thống bằng cách phân tích hệ thống thành các khối chức năng, trong đó mô hình toán của các khối chức năng đã biết hoặc có thể rút ra được dựa vào các qui luật vật lý, sau đó các khối chức năng được kết nối toán học để được mô hình của hệ thống.

Các bước mô hình hóa:

+ Phân tích chức năng
+ Phân tích vật lý
+ Phân tích toán học

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.2 PHÂN TÍCH CHỨC NĂNG

2.2.1 Khái niệm

• Phân tích chức năng thực chất là phân tích hệ thống cần mô hình hóa thành nhiều hệ thống con, mỗi hệ thống con gồm nhiều bộ phận chức năng (functional component).

• Phân tích chức năng cần để ý liên kết vật lý (connectivity) và quan hệ nhân quả (causality) giữa các thành phần bên trong hệ thống.

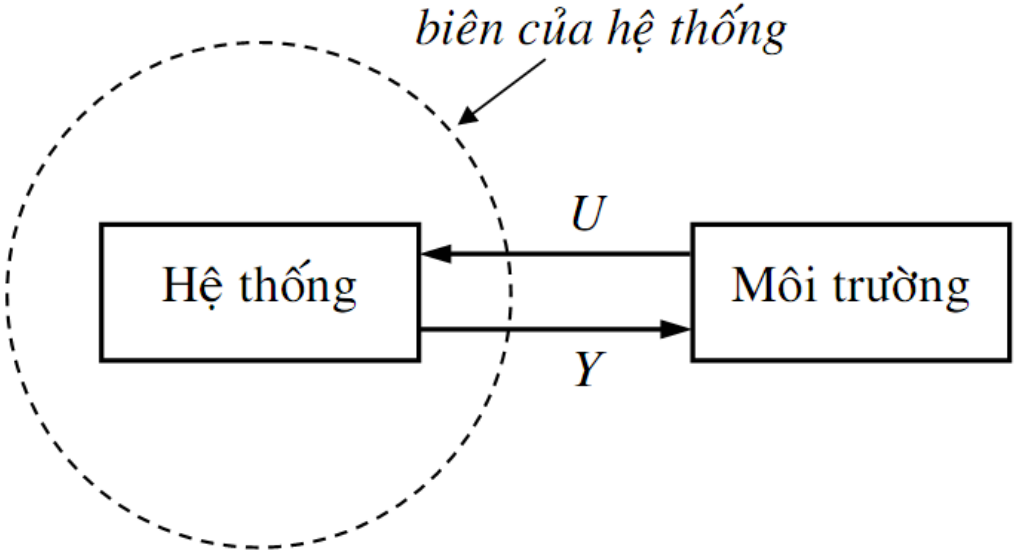
• Ba bước phân tích chức năng:

+ Cô lập hệ thống
+ Phân tích hệ thống con
+ Xác định các quan hệ nhân quả

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.2.2 Cô lập hệ thống - Liên kết ngoài

• Xác định giới hạn của hệ thống cần mô hình hóa, cắt kết nối giữa hệ thống khảo sát với môi trường ngoài, mỗi kết nối bị cắt được thay thế bằng một cổng để mô tả sự tương tác giữa hệ thống và môi trường.



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

• Cổng (port): là một cặp đầu cuối mà qua đó năng lượng hoặc công suất vào hoặc ra khỏi hệ thống.

Một hệ thống có thể có nhiều cổng (multiport system).

• Bốn loại cổng thường gặp:

+ Cơ khí (Structural)

+ Điện (Electrical)

+ Nhiệt (thermal)

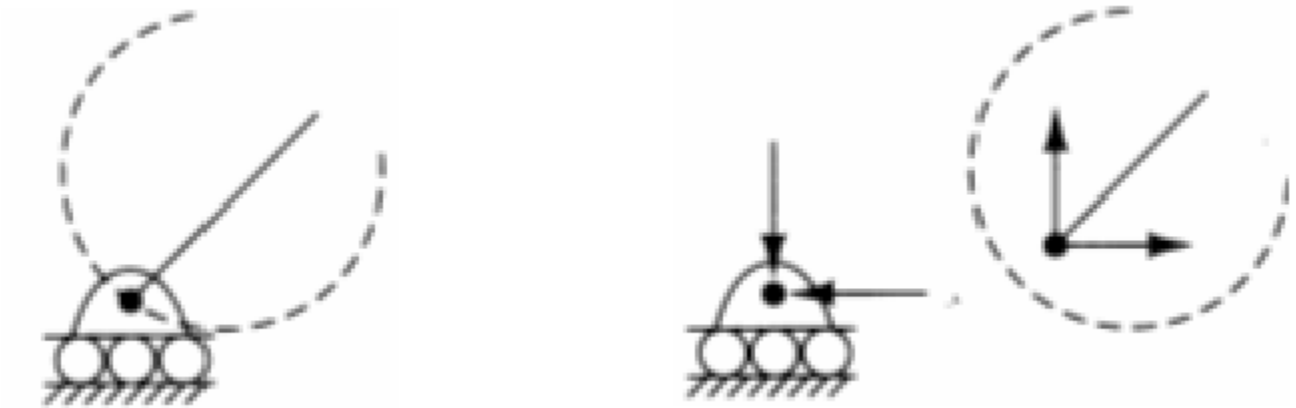
+ Lưu chất (fluid)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

1. Cổng cấu trúc cơ khí

a. Tịnh tiến (Structural Translation - ST)



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

1. Cổng cấu trúc cơ khí

b. Quay (Structural Rotation - SR)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

1. Cổng cấu trúc cơ khí

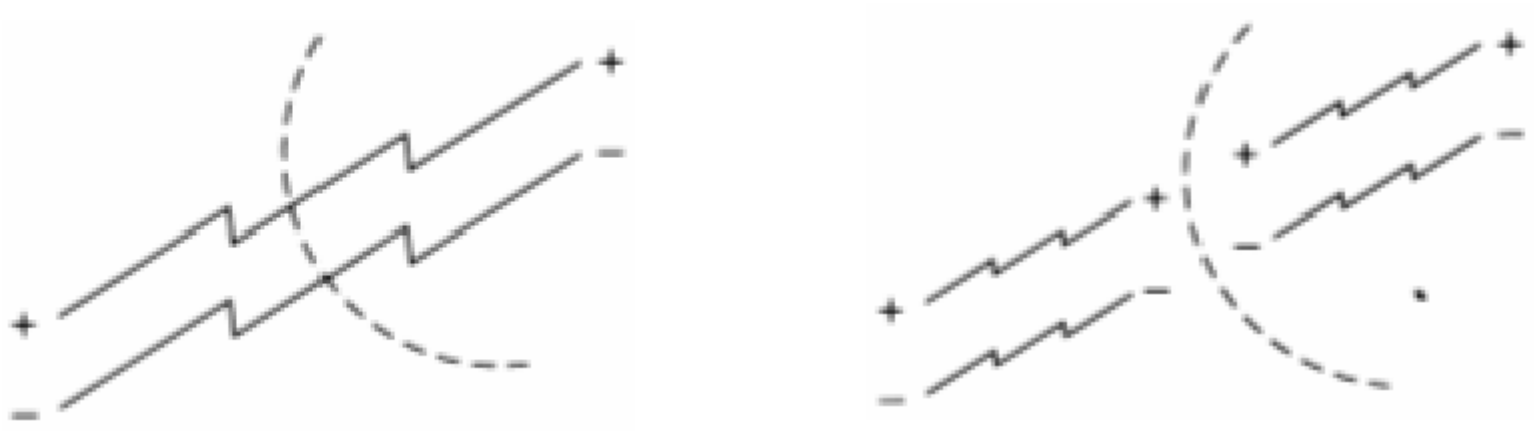
c. Phức hợp (Structural Complex - SC)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

2. Cổng cấu trúc điện

a. Điện dẫn (Electrical Conduction – EC)



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

2. Cổng cấu trúc điện

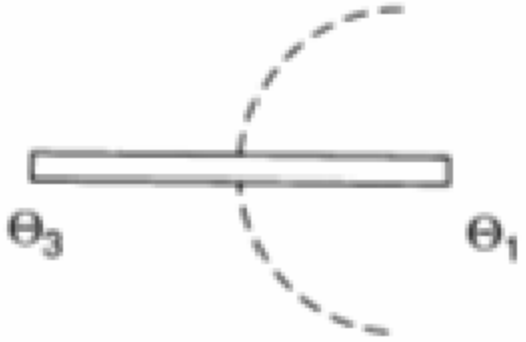
b. Điện bức xạ (Electrical Radiation – ER)

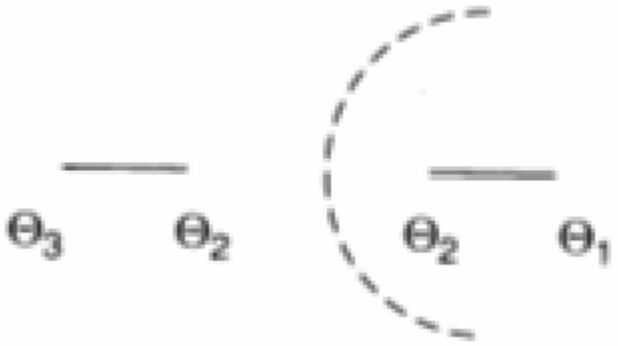
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

3. Cổng cấu trúc nhiệt

a. Dẫn nhiệt (Thermal Conduction – TC)



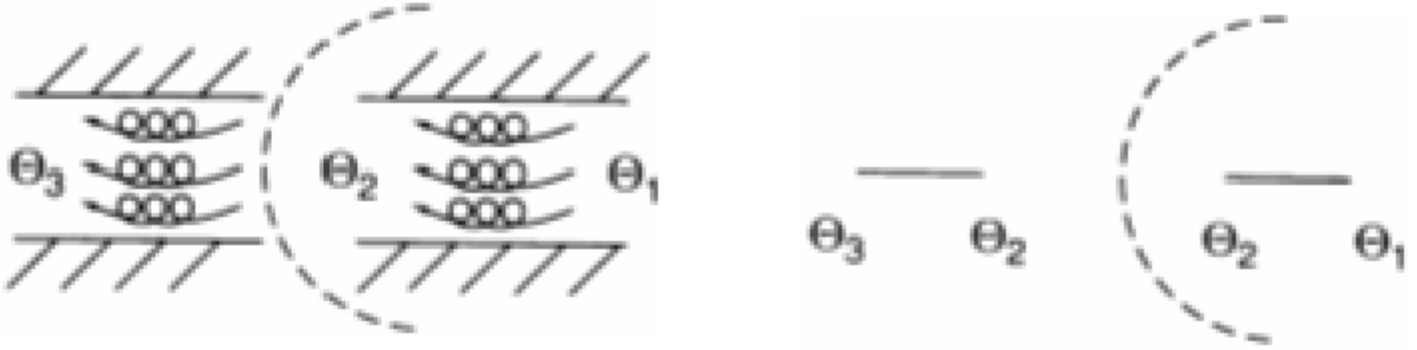


CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

3. Cổng cấu trúc nhiệt

b. Đối lưu nhiệt (Thermal Convention – TV)

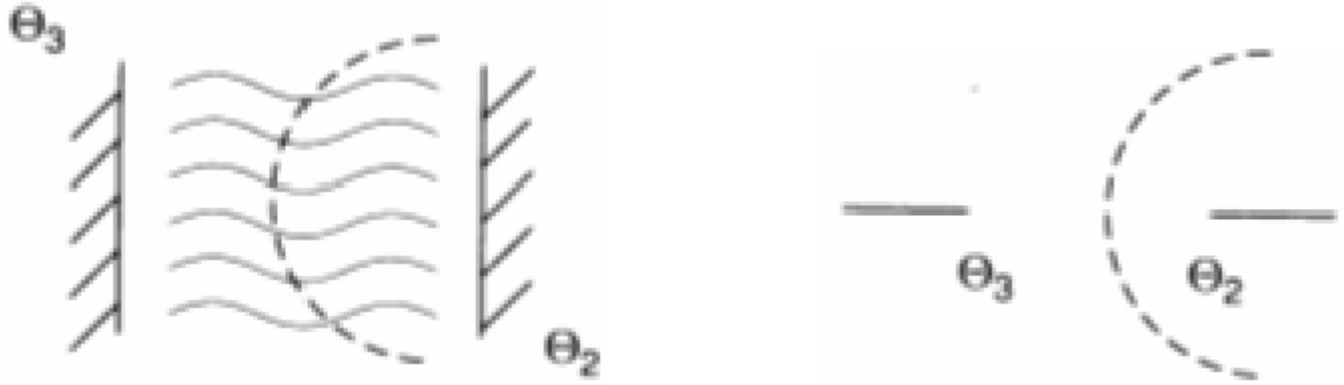


CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

3. Cổng cấu trúc nhiệt

c. Bức xạ nhiệt (Thermal Radiation – TR)

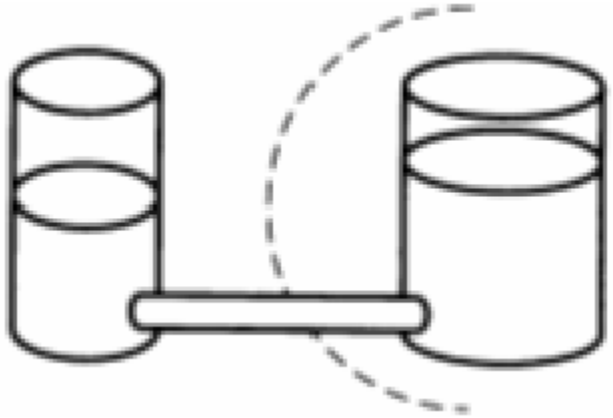


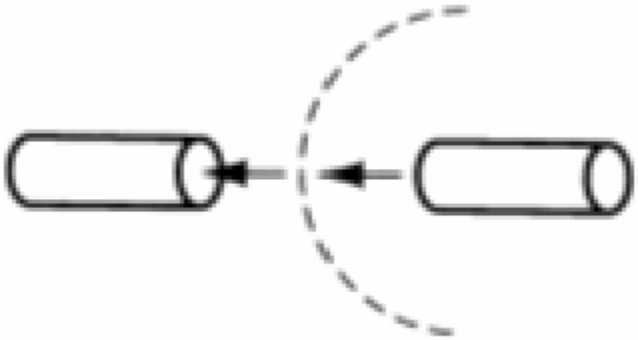
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các loại cổng thường gặp

4. Cổng cấu trúc lưu chất

a. Nội lưu (Fluid Internal – FI)





CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

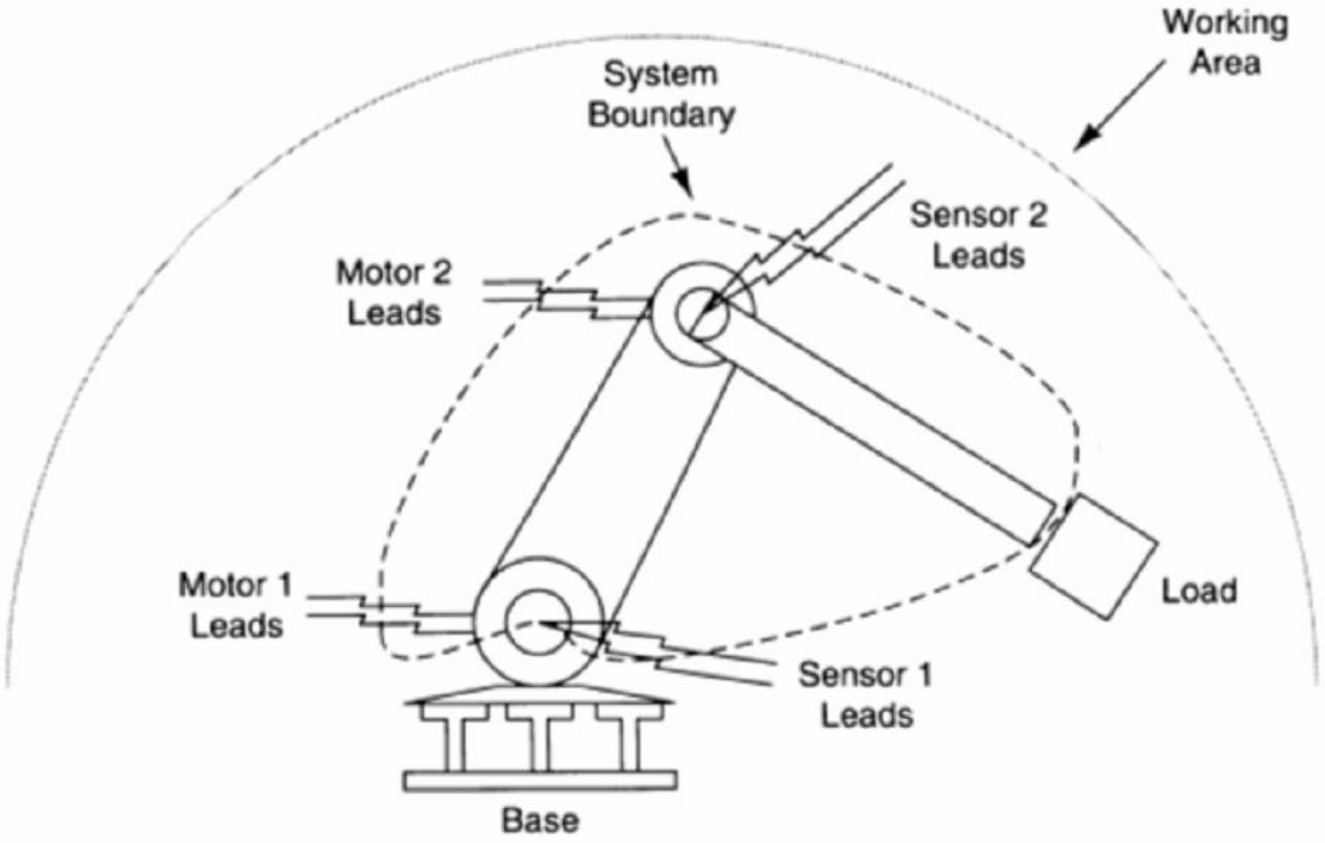
Các loại cổng thường gặp

4. Cổng cấu trúc lưu chất

b. Ngoại lưu (Fluid External – FE)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

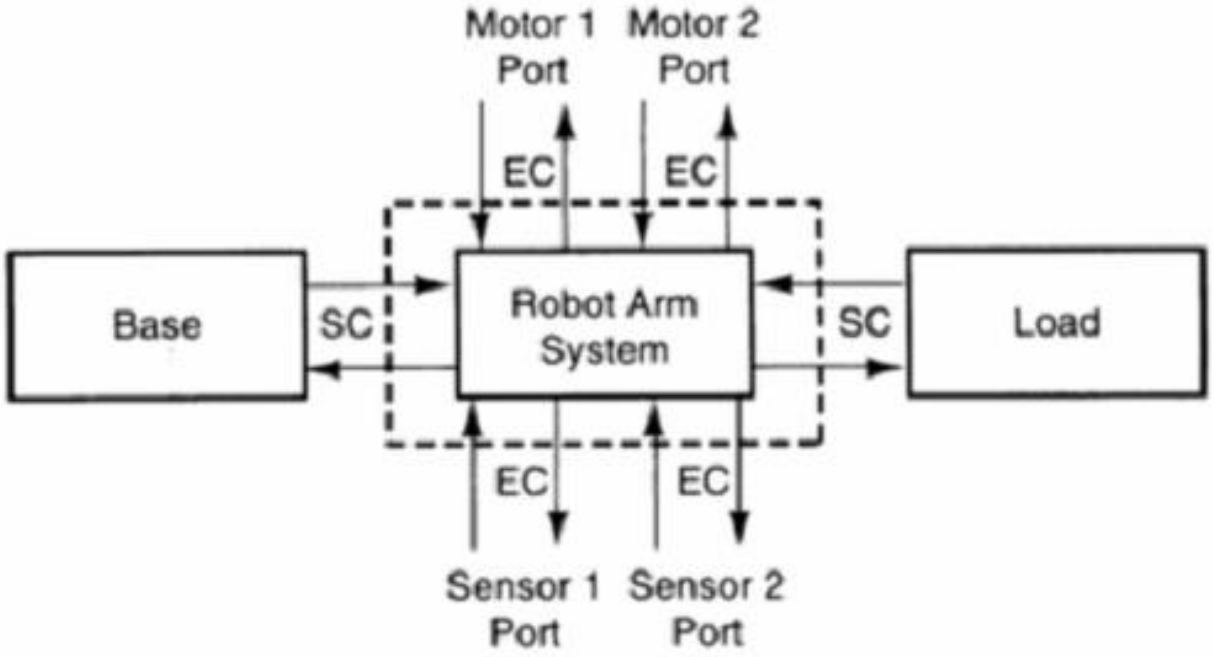
Ví dụ : Cô lập hệ cánh tay máy



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

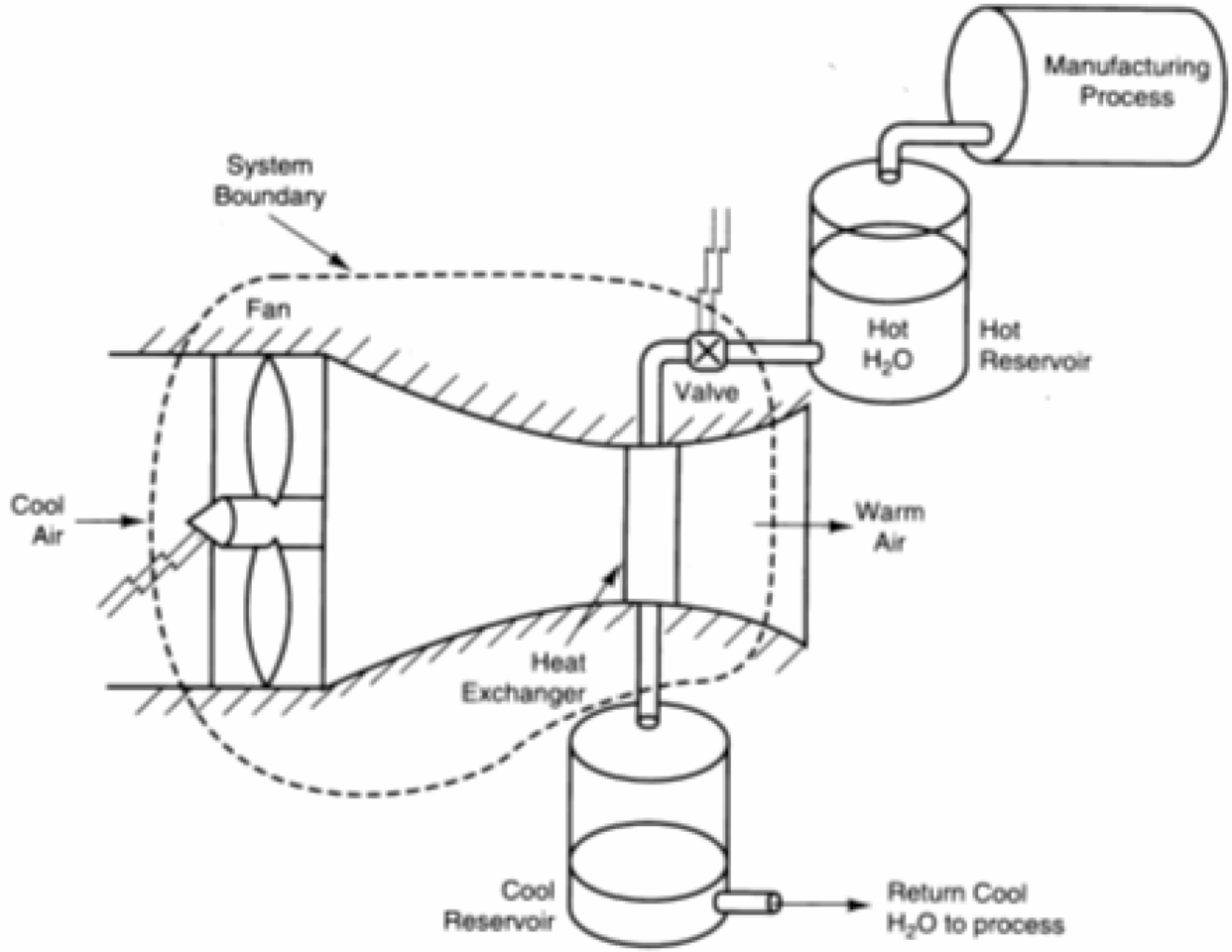
Ví dụ : Cô lập hệ cánh tay máy

Sơ đồ liên kết ngoài của cánh tay robot



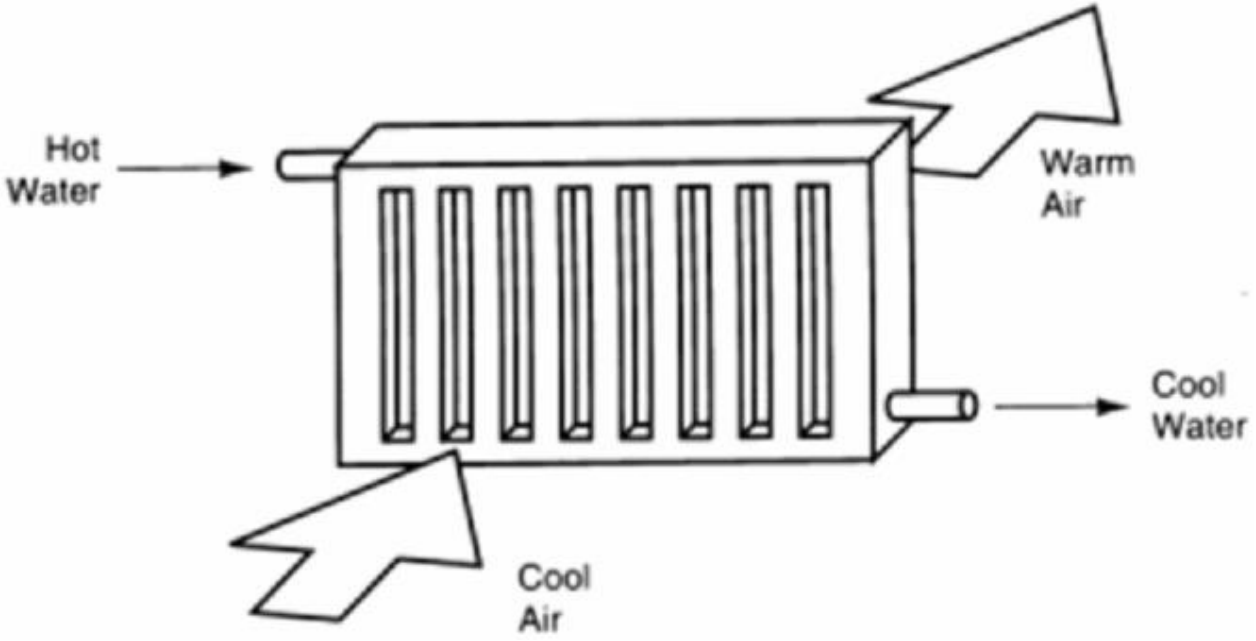
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ : Cô lập hệ thống làm mát



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

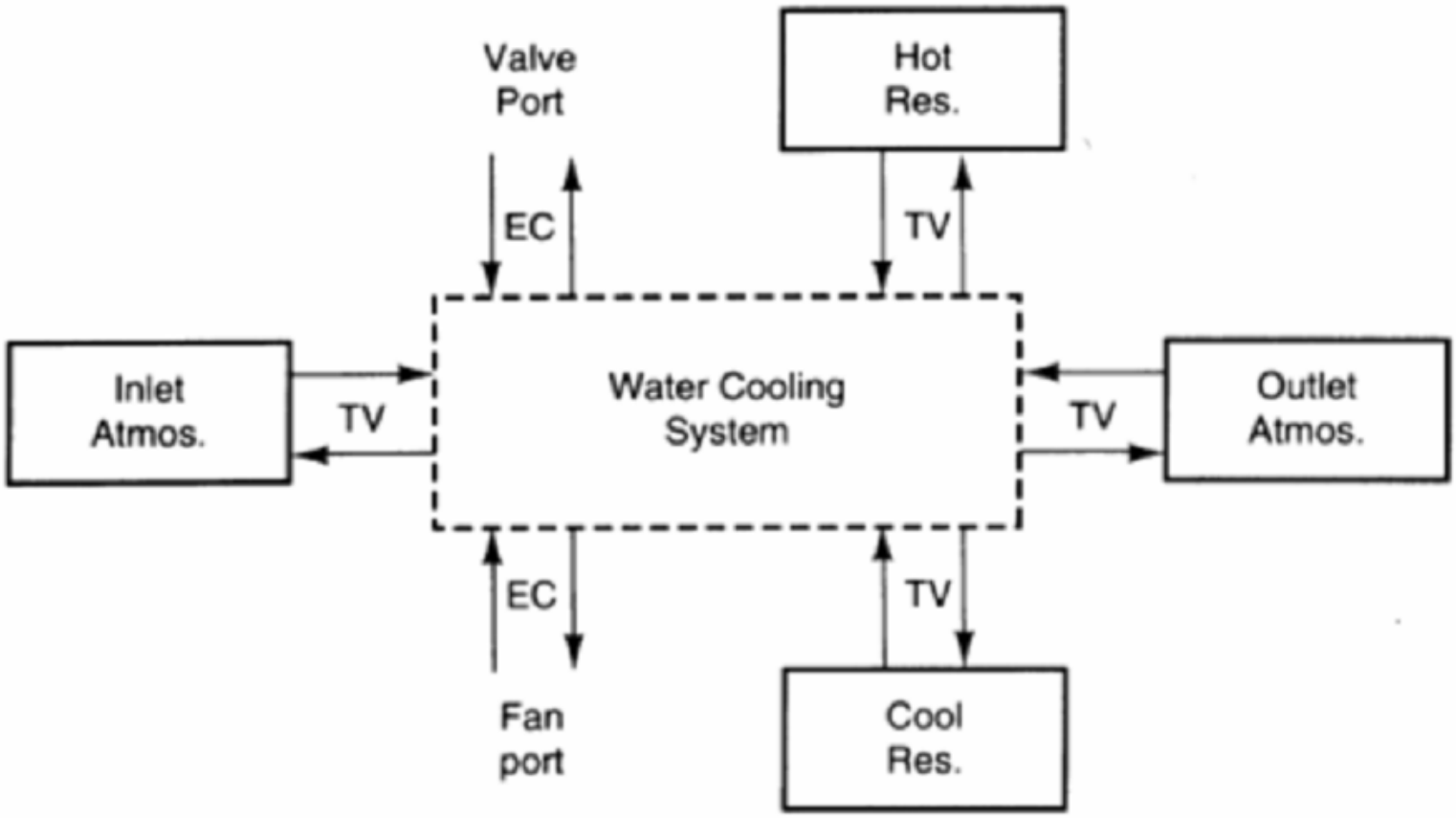
Ví dụ : Cô lập hệ thống làm mát



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ : Cô lập hệ thống làm mát

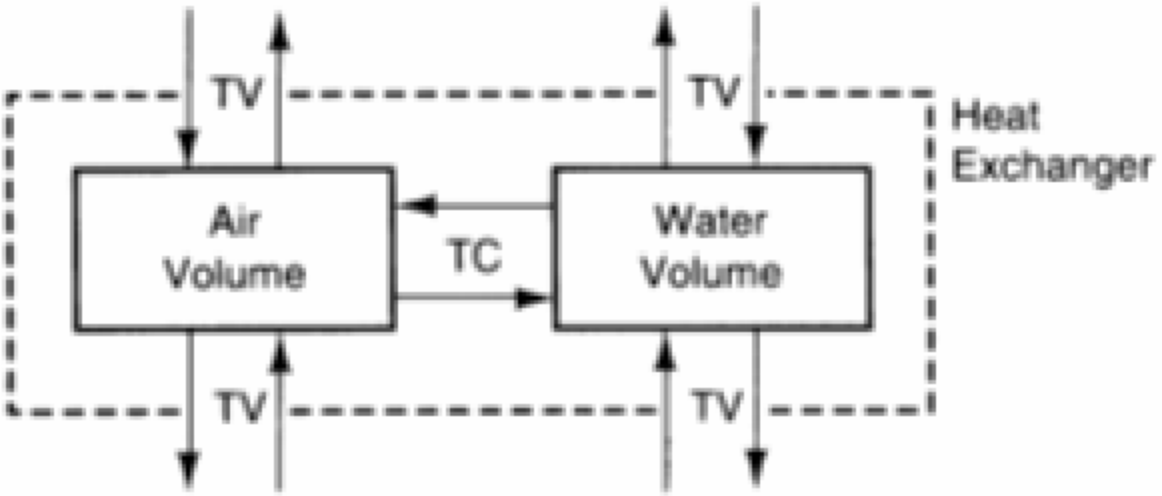
Sơ đồ đa cổng của hệ thống



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ : Cô lập hệ thống làm mát

Sơ đồ đa cổng hệ thống trao đổi nhiệt

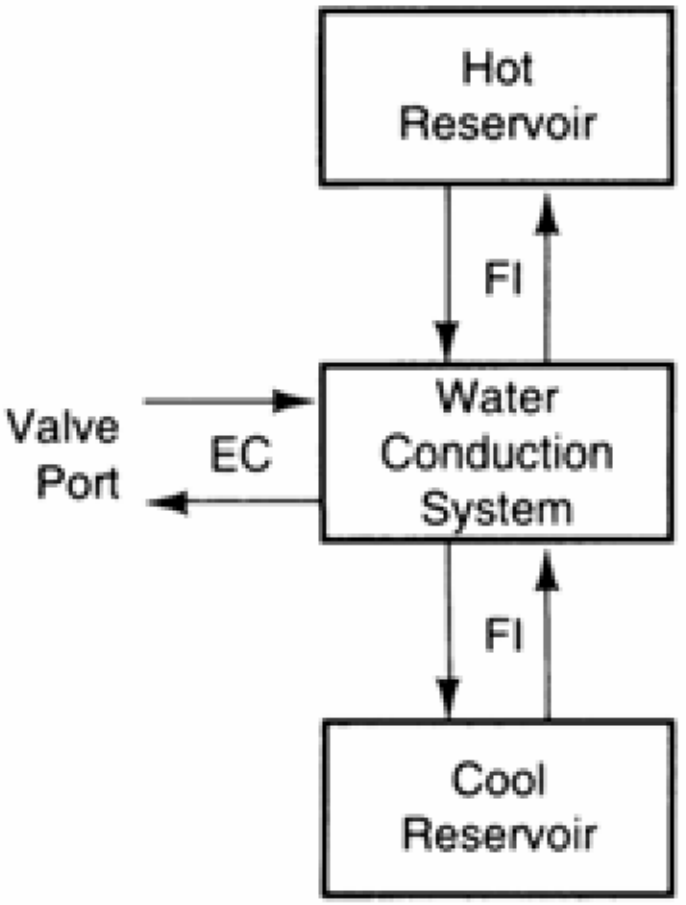


CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ : Cô lập hệ thống làm mát

Sơ đồ đa cổng lưu chất lỏng

trong hệ thống làm mát



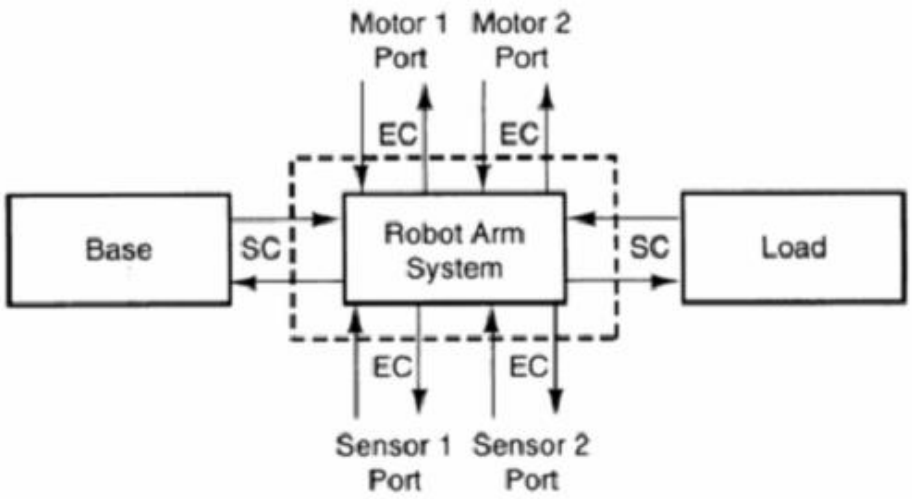
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

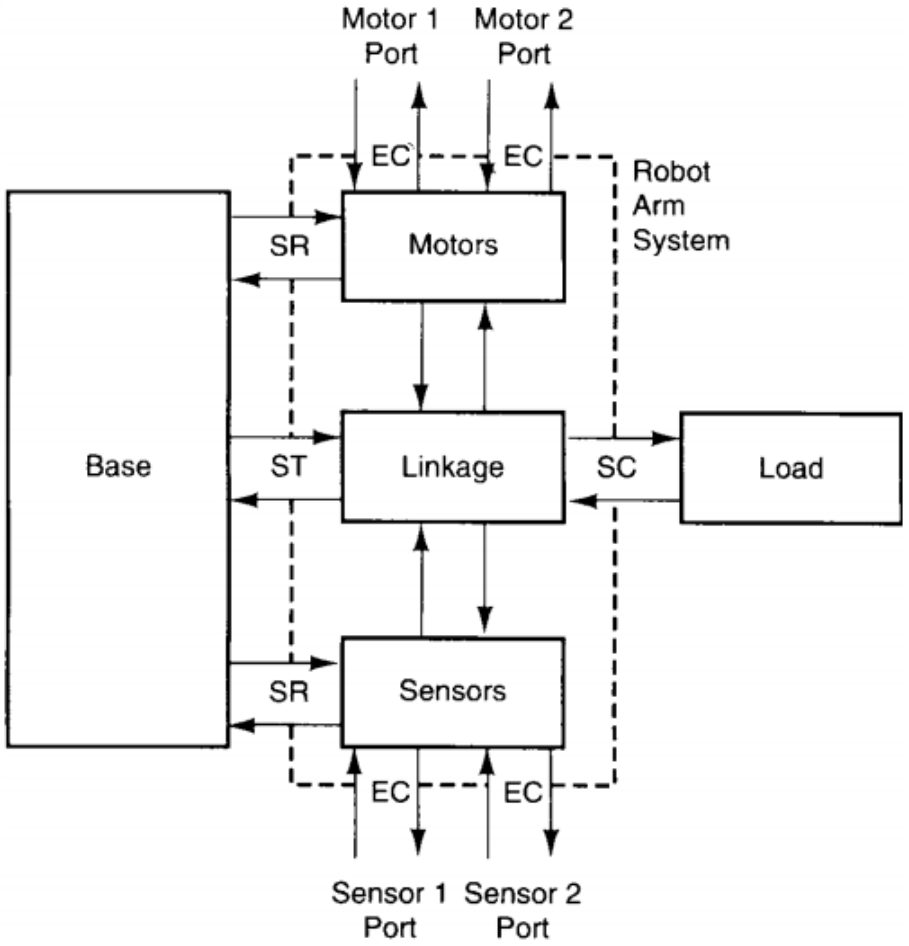
2.2.3 Phân tích hệ thống con - Liên kết trong

- Phân tích hệ thống sau khi cô lập thành các hệ thống con (subsystem).
- Phân tích các hệ thống con chi tiết đến các bộ phận (component).
- Thay thế liên kết giữa các bộ phận bằng các cổng.

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

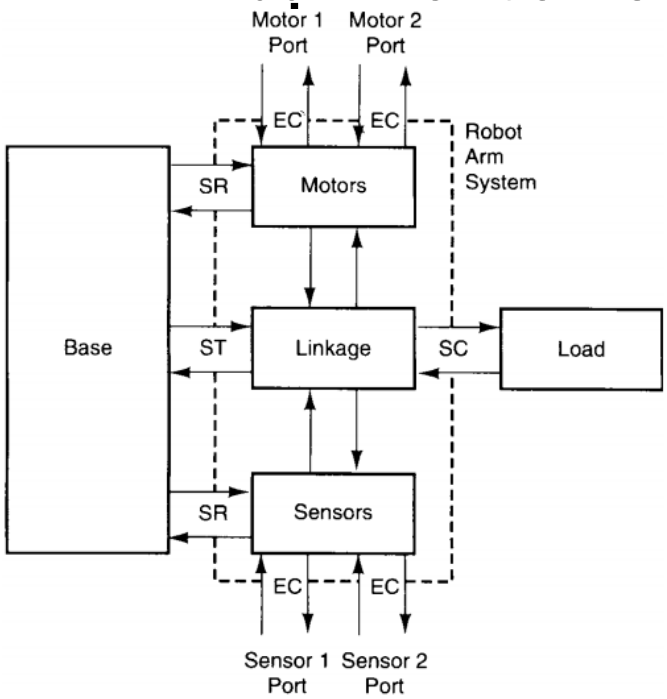
Ví dụ : Phân tích liên kết trong hệ cánh tay robot

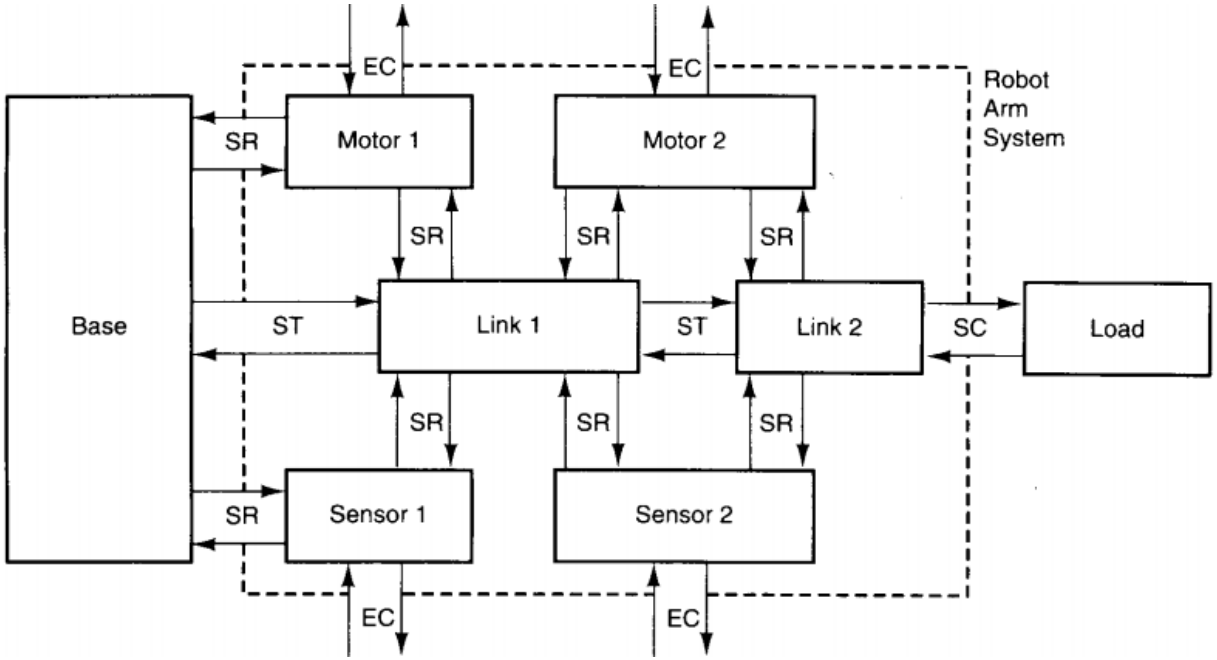




CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ : Phân tích liên kết trong hệ cánh tay robot

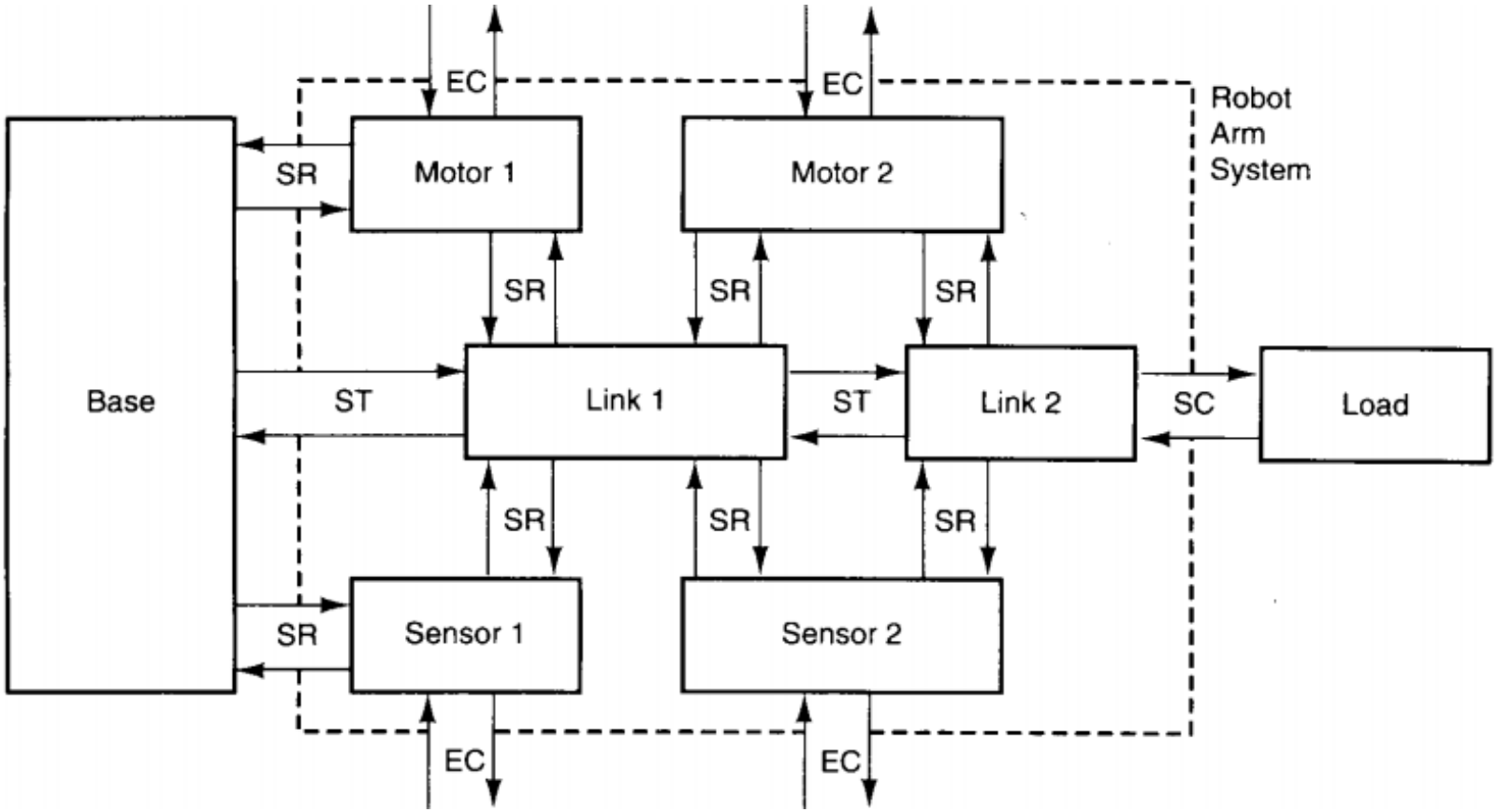




CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ : Phân tích liên kết trong hệ cánh tay robot

Sơ đồ khối cánh tay máy chi tiết đến các bộ phận



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.2.4 Quan hệ nhân quả - Các biến của hệ thống

• Vì cổng là đầu cuối mà qua đó công suất (năng lượng) truyền vào ra hệ thống nên quan hệ nhân quả của cổng được xác định bởi các biến định nghĩa công suất tại cổng.

Quan hệ các đại lượng của các dạng cổng

Loại cổng	Đại lượng
Electrical – Conduction (EC)	Voltage (E) – Current (I)
Electrical – Radiation (ER)	Voltage (E) – Current (I)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Loại cổng	Đại lượng
Structureal – Translating (ST)	Force (F) – Linear Velocity (V)
Structural – Rotation (SR)	Torque (M) – Agular Velocity (N)
Structural Complex (SC)	
ST + SR	

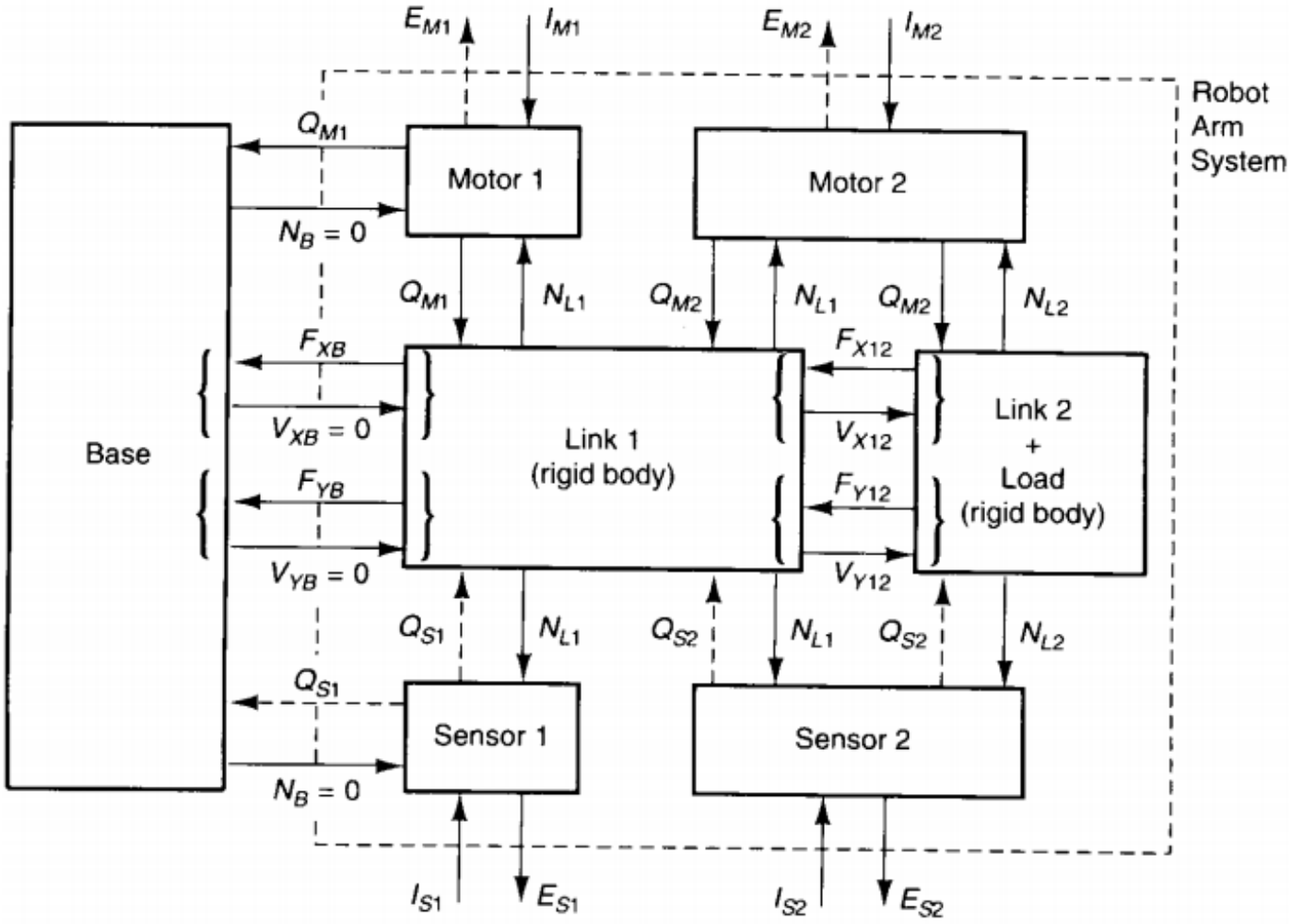
Loại cổng	Đại lượng
Therman – Conduction (TC)	Temperature (Θ) – Heat Flowrate (H)
Therman – Radiation (TR)	Temperature (Θ) – Heat Flowrate (H)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Loại cổng	Đại lượng
Fluid Incompression (FI)	Pressure (P) – Vol. Flowrate (H)
Fluid Compression (FI)	Pressure (P) – Vol. Flowrate (H)
Therman – Convective (TV)	Pressure (P) – Mass. Flowrate (W)
	Pressure (P) – Temperatre (Θ)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ: Sơ đồ khối hoàn chỉnh của cánh tay máy



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.3 PHÂN TÍCH VẬT LÝ

2.3.1 Phương pháp phân tích vật lý

a. Các qui luật vật lý

Quan hệ cơ bản giưa lượng, thế và dòng

Hệ thống vật lý có thể chia thành 4 loại:

- Điện (Electrical)
- Cơ (Machenical)
- Nhiệt (Thermal)
- Lưu chất (Fluid)

Một hệ thống phức tạp có thể gồm nhiều hệ thống con thuộc 4 loại.

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

- Mỗi loại hệ thống có 3 phần tử cơ bản (basis element):
  - Trở (resistance)
  - Dung (capacitance)
  - Cảm (inductance) hay quán tính (inertia)
- Các phần tử cơ bản này được định nghĩa dựa trên 3 biến:
  - Lượng (quantity)
  - Thế (potential)
  - Thời gian (time).

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các biến được sử dùng để định nghĩa các yếu tố cơ bản của các loại hệ thống.

Loại hệ thống	Biến		
	Lượng	**Thế**	**Thời gian**
Điện	Điện tích	Điện thế	Giây
Cơ khí	Khoảng cách Góc quay	Lực Mô men	Giây
Lưu chất	Thể tích	Áp suất	Giây
Nhiệt	Nhiệt năng	Nhiệt độ	Giây

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các biến khác được định nghĩa dựa trên 3 biến cơ bản trên.

• **Cường độ dòng:** biến thiên lượng trong một đơn vị thời gian (hay cường độ dòng là tốc độ biến thiên lượng).

$$\textbf{Cường độ dòng} = \frac{d}{dt}\ \textbf{(lượng)}$$

• **Công suất:**

Công suất = (thế) x (cường độ dòng)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Định nghĩa các phần tử cơ bản (Quan hệ giữa lượng, thế và dòng).

• **Trở:** sự chống lại sự chuyển động hay dòng vật chất, năng lượng. Trở được đo bằng thế cần thiết để chuyển một đơn vị lượng trong một đơn vị thời gian (giây).

$$\textbf{Trở} = \frac{\textbf{thế}}{\textbf{cường độ dòng}}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Định nghĩa các phần tử cơ bản (Quan hệ giữa lượng, thế và dòng).

• **Dung:** biểu diễn mối quan hệ giữa lượng và thế. Dung được đo bằng lượng cần thiết là cho thế biến thiên một đơn vị.

$$\textbf{Dung} = \frac{\textbf{lượng}}{\textbf{thế}}$$

$$\textbf{Thế} = \frac{1}{\textbf{dung}} \int \textbf{(cường độ dòng)}\, dt$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Định nghĩa các phần tử cơ bản (Quan hệ giữa lượng, thế và dòng).

• **Cảm:** hay quán tính là sự chống lại sự thay đổi trạng thái chuyển động. Cảm được đo bằng thế cần thiết để làm tốc độ biến thiến của lượng thay đổi một đơn vị.

Thế $=$ **(cảm)** $\frac{d}{dt}$ **(cường độ dòng)**

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phương trình cân bằng

Các định luật bảo toàn khối lượng, năng lượng, và xung lượng là định luật cơ bản được sử dụng khi mô hình hóa.

Phương trình cân bằng cơ bản có dạng tổng quát như sau:

Dòng tích lũy = dòng vào – dòng ra

Nếu hệ thống không có các phần tử tích trữ khối lượng, năng lượng và xung lượng thì phương trình cân bằng:

0 = dòng vào – dòng ra

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phương trình cân bằng

Nếu hệ thống có phần tử tích trữ khối lượng, năng lượng hay xung lượng thì sự tích trữ này làm thay đổi trạng thái của hệ thống.

$$\frac{d}{dt}$$ **(biến trạng thái) = dòng vào – dòng ra**

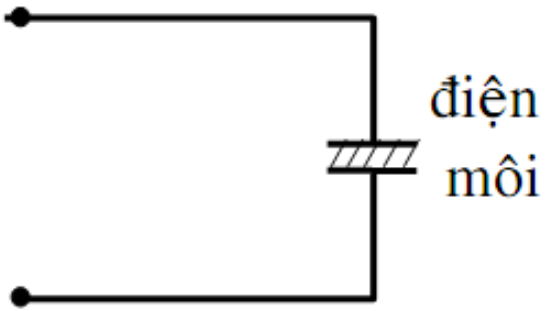
Các hiện tượng tự nhiên xảy ra theo hướng làm tối thiểu năng lượng, và nhiều bài toán mô hình hóa mô tả điều kiện cân bằng liên quan đến sự tối thiểu năng lượng.

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

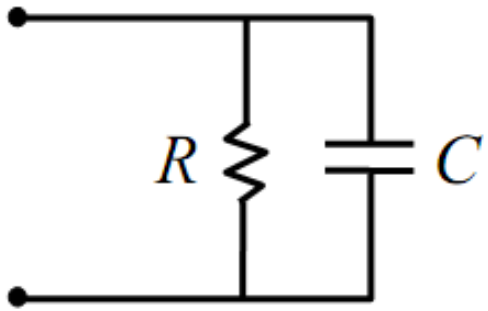
b. Lý tưởng hóa các phần tử vật lý

Các nguyên tắc lý tưởng hóa

• **Nguyên tắc thuần hóa:** nhận ra ảnh hưởng vật lý cơ bản chi phối hoạt động của đối tượng và dùng các phần tử thuần để biểu diễn..



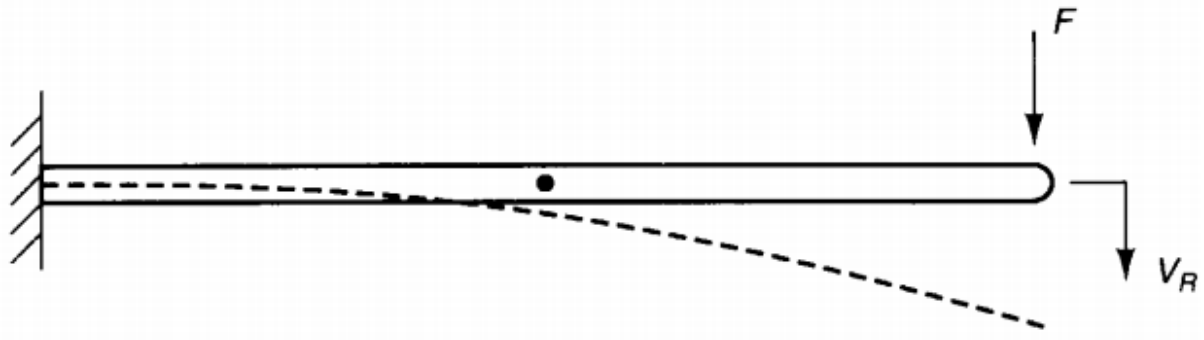
Tụ thực tế

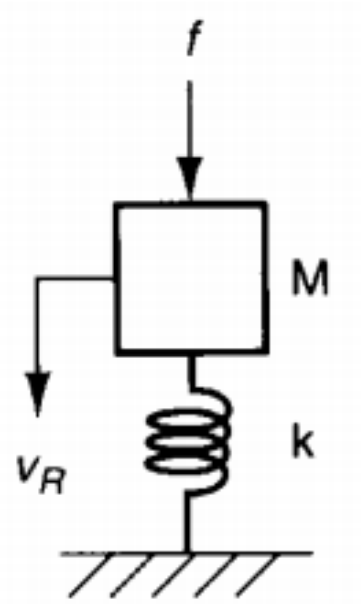


Thuần hóa bằng tụ lý tưởng và trở

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

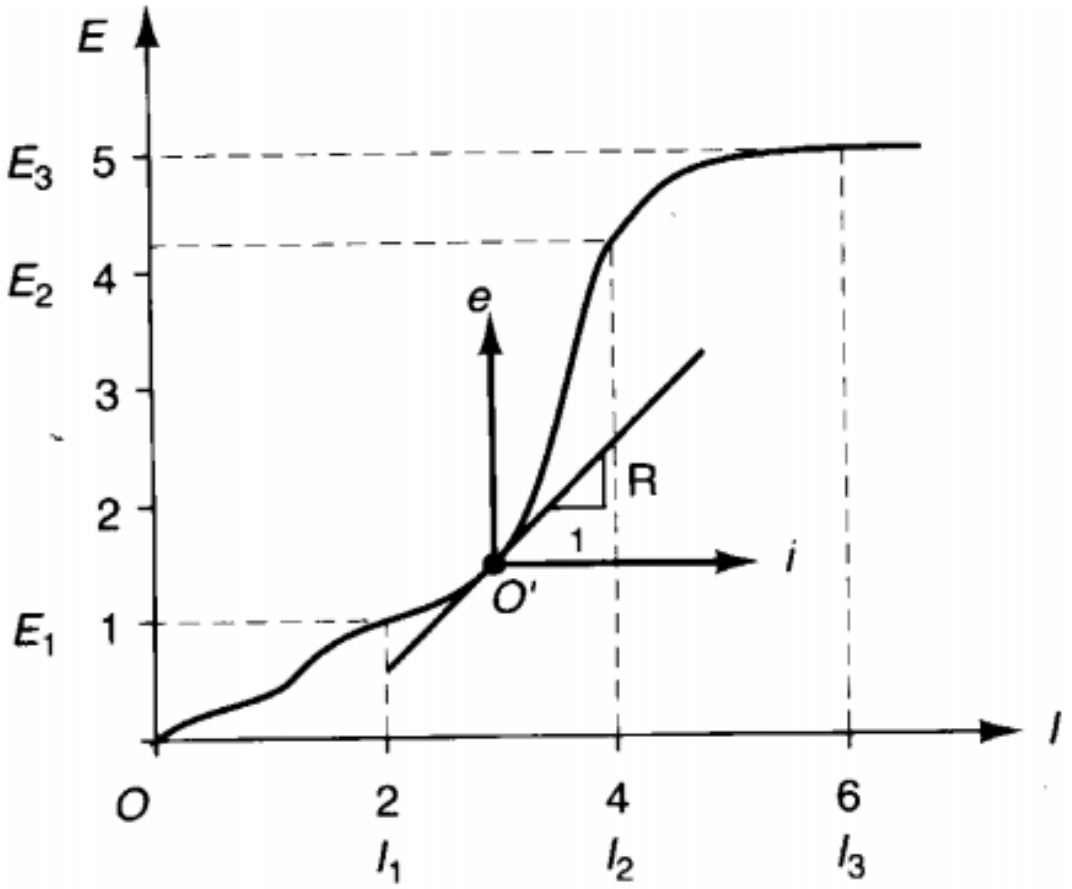
• **Nguyên tắc tập trung hóa:** các ảnh hưởng vật lý thực luôn phân bố trong một miền hay không gian nhất định (dù nhỏ). Các ảnh hưởng phân bố này có thể lý tưởng hóa bằng cách mô hình hóa tập trung.





CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

• **Nguyên tắc tuyến tính hóa:** tất cả các hệ thống thực đều là hệ phi tuyến ⇒ lý tưởng hóa bằng cách tuyến tính hóa.



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

c. Sự tương đồng của các quan hệ vật lý

• Các hiện tượng vật lý có sự tương đồng nên có thể mô hình hóa hệ cơ bằng hệ điện, hệ nhiệt bằng hệ điện,…

Điện trở (điện): $e_{12} = R.i$

Ma sát chuyển động thẳng: $v_{12} = (1/b).f$

Ma sát chuyển động quay: $n_{12} = (1/B).q$

Ma sát chất lỏng: $p_{12} = (R_f).z$

Điện trở nhiệt: $\theta_{12} = (R_T).h$

$e_{12} = (\ )^{*} i$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

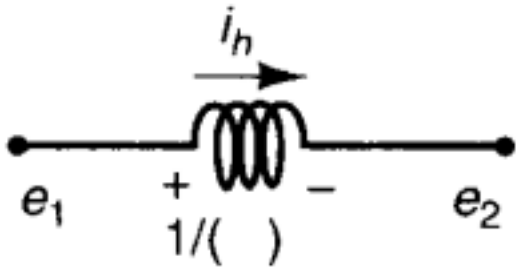
c. Sự tương đồng của các quan hệ vật lý

Điện cảm (điện): $i = (1/L)\int e_{12}dt$

Lực cản (thẳng): $f = (k)\int v_{12}dt$

Mô men (quay): $q = (K)\int n_{12}dt$

Ma sát chất lỏng: $z = (1/I_f)\int p_{12}dt$



$$i = (\quad)\int e_{12}dt$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

c. Sự tương đồng của các quan hệ vật lý

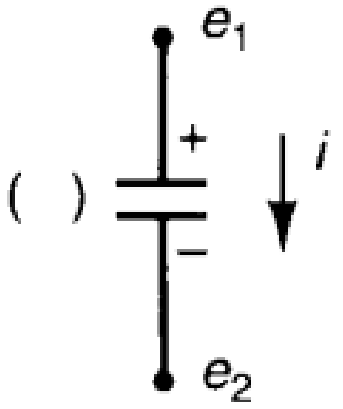
Điện dung (điện): $i = (C)de_{12}/dt$

Khối lượng cấu trúc: $f = (M)dv_{IR}/dt$

Quán tính cấu trúc: $q = (J)dn_{IR}/dt$

Khối thể tích chất lỏng: $z = (C_f)dp_{IR}/dt$

Thể tích nhiệt lượng: $h = (C_T)d\theta_{IR}/dt$



$$i = (\ )\frac{d}{dt}e_{12}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

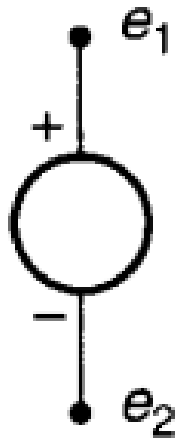
Nguồn điện áp:

Nguồn chuyển động thẳng:

Nguồn chuyển động quay:

Nguồn áp suất chất lỏng:

Nguồn nhiệt :



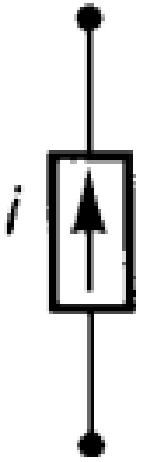
Nguồn dòng điện:

Nguồn lực:

Nguồn mô men :

Nguồn lưu chất:

Nguồn dòng nhiệt :



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.3.2. Phân tích vật lý hệ thống điện

a. Các phần tử điện

Các biến cơ bản trong hệ thống điện:

- **Điện lượng:** q [C]
- **Điện thế:** u [V]
- **Cường độ dòng điện:** i [A]

$$i = \frac{dq}{dt}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phần tử điện cơ bản

- **Điện trở:** $\mathrm{R} = \rho \frac{l}{S}$ [Ω] $R = \frac{u}{i}$
- **Điện dung:** $\mathrm{C} = \varepsilon \frac{S}{d}$ [F] $C = \frac{q}{u}$ $u = \frac{1}{C}\int i dt$
- **Điện cảm:** $\mathrm{L} = \frac{\mu \pi r^2 N}{b}$ [H] $u = L\frac{di}{dt}$
- Nguồn áp lý tưởng:
- Nguồn dòng lý tưởng:

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

b. Phương trình cân bằng điện

Định luật Kirchoff về dòng.

Định luật Kirchoff về áp.

c. Phương pháp giải tích mạch điện

Phương pháp dòng vòng

Phương pháp thế đỉnh

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.3.3 Phân tích vật lý hệ thống cơ

a. Các phần tử hệ thống cơ

Chuyển động thẳng

Các biến:

- **Khoảng cách:** x [m]
- **Lực:** f [N]
- **Tốc độ:** v [m/sec]

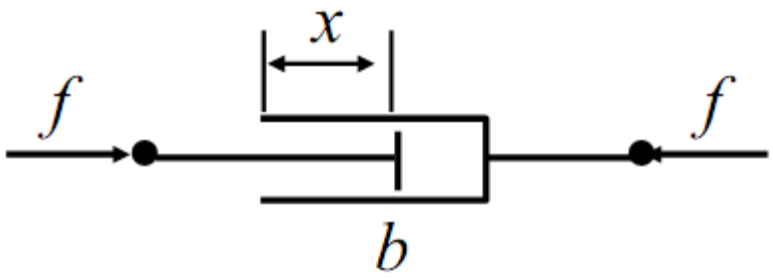
$$v = \frac{dx}{dt}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phần tử:

- **Trở:** $R_M = b$

  với b : hệ số ma sát nhớt [N.sec/m]



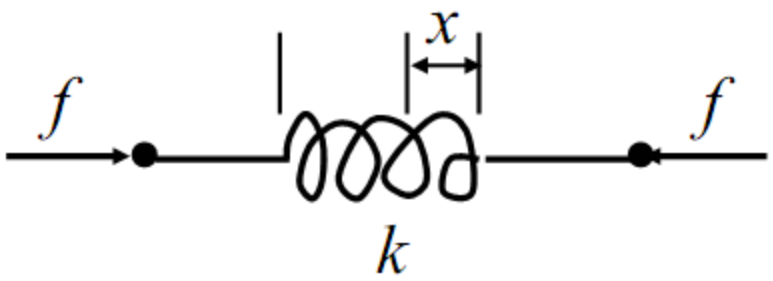
$$b = \frac{f}{v} \Leftrightarrow R_M = \frac{f}{v}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phần tử:

- **Dung:** $C_M = 1/k$

  với k : độ cứng lò xo [N/m]



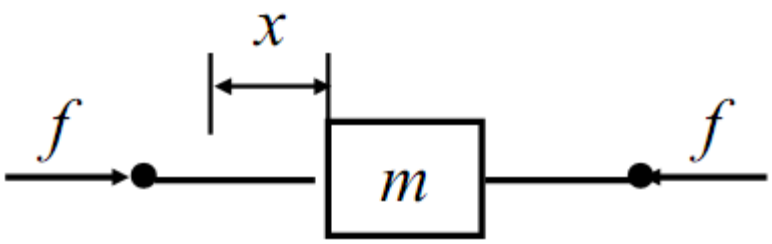
$$\frac{1}{k} = \frac{x}{f} \Leftrightarrow C_M = \frac{x}{f}$$

$$f = kx = k\int vdt \Leftrightarrow f = \frac{1}{C_M}\int vdt$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phần tử:

- **Quán tính cơ:** m : khối lượng [kg]



$$f = m\frac{dv}{dt} = ma$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

a. Các phần tử hệ thống cơ

Chuyển động quay

Lực	↔	Moment
Khoảng cách	↔	Góc quay
Vận tốc	↔	Vận tốc góc
Gia tốc	↔	Gia tốc góc
Quán tính	↔	Moment quán tính

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

b. Phương trình cân bằng cơ

Phương trình cân bằng lực.

Phương trình Euler – Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

Trong đó:

L = T - U

U: thế năng

T: động năng

q: tọa độ tổng quát

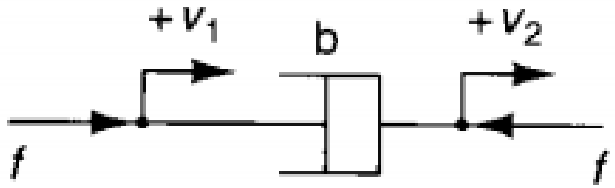
τ: ngoại lực (hay moment)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

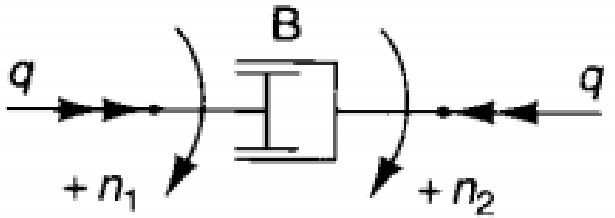
c. Sự tương đồng giữa hệ thống cơ và hệ thống điện

Tiêu tán

$$e_{12} = Ri$$

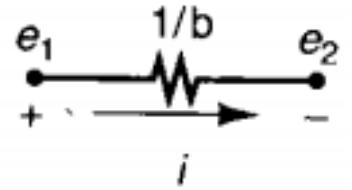


$$v_{12} = \frac{1}{b} f$$

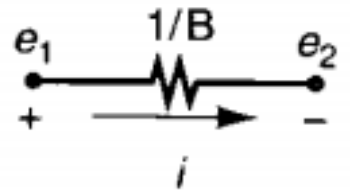


$$n_{12} = \frac{1}{B} q$$

Sự tương đồng



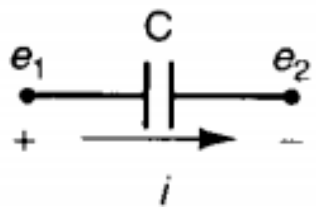
$$e \sim v; i \sim f; e_{12} = \frac{1}{b} i$$



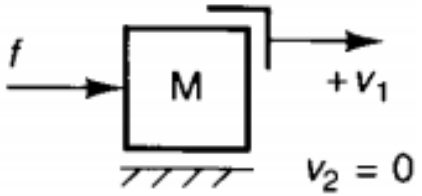
$$e \sim n; i \sim q; e_{12} = \frac{1}{B} i$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

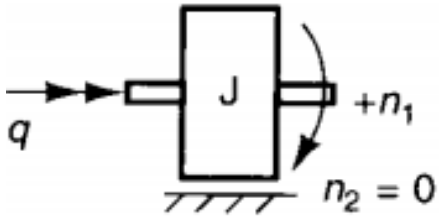
Tích lũy ‘e’



$$i = C\frac{de}{dt}$$

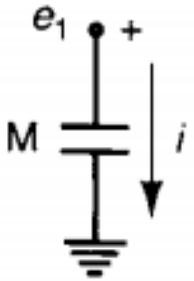


$$f = M\frac{dv_{12}}{dt}$$



$$q = J\frac{dn_{12}}{dt}$$

Sự tương đồng

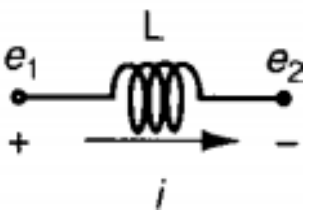


$$e \sim v; i \sim f; i = M\frac{de}{dt}$$

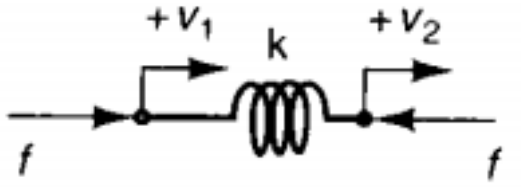
$$e \sim n; i \sim q; i = J\frac{de}{dt}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

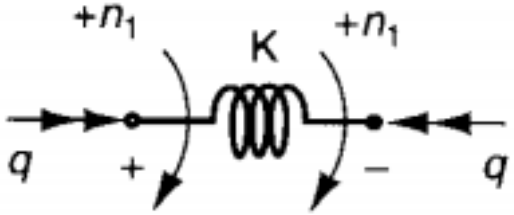
Tích lũy ‘i’



$$i = \frac{1}{L}\int e_{12}dt$$

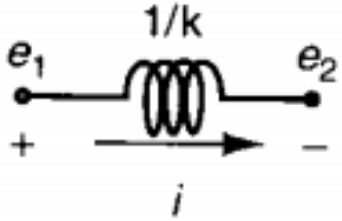


$$f = k\int v_{12}dt$$

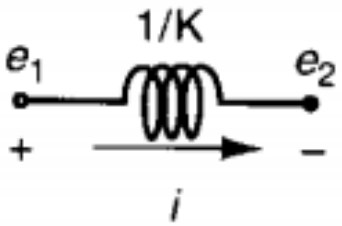


$$q = K\int n_{12}dt$$

Sự tương đồng



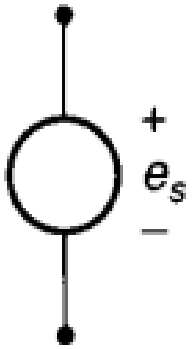
$$e \sim v; i \sim f; i = k\int e_{12}dt$$

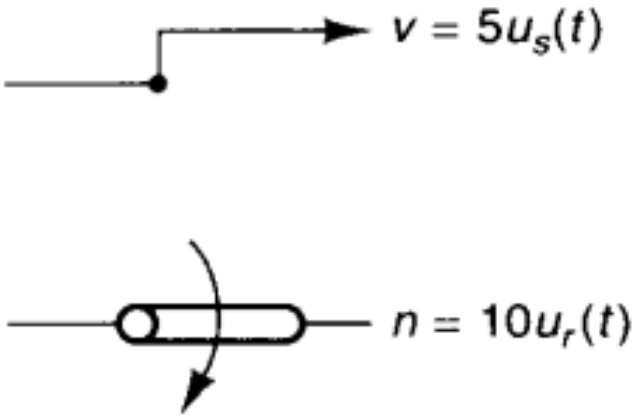


$$e \sim n; i \sim q; i = K\int e_{12}dt$$

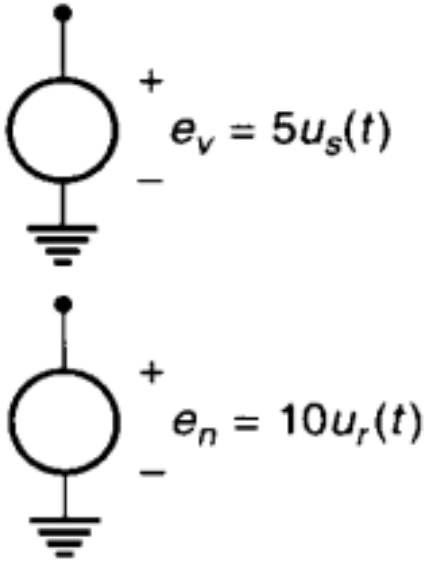
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Dạng nguồn áp



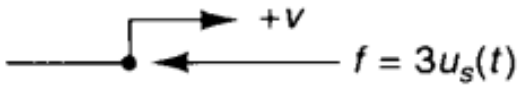


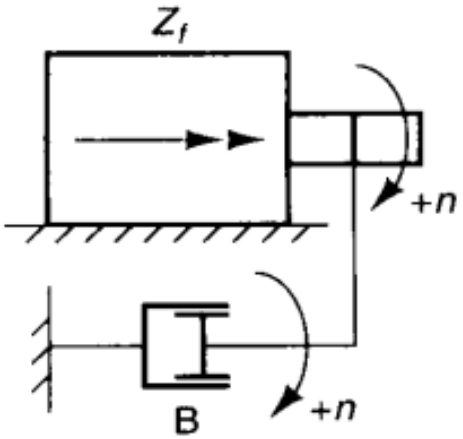
Sự tương đồng



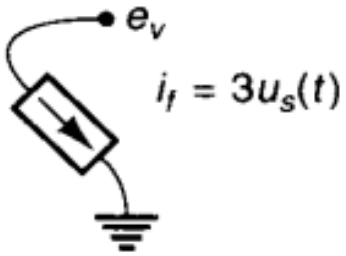
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

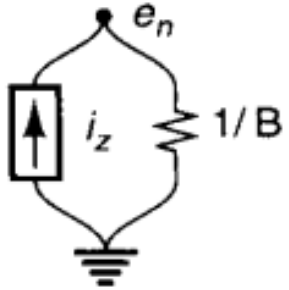
Dạng nguồn dòng





Sự tương đồng





CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.3.4 Phân tích vật lý hệ thống nhiệt

a. Các phần tử nhiệt

Các biến trong hệ thống nhiệt :

- Nhiệt độ: θ [^oC]
- Nhiệt năng: Q [J]
- Dòng nhiệt: H [J/sec]

$$H = \frac{dQ}{dt}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phần tử nhiệt:

- Nhiệt trở: $$R_T = \frac{l}{k_C S}$$

Trong đó: k_C: hệ số dẫn nhiệt của môi trường truyền nhiệt

l: chiều dài của môi trường truyền nhiệt

S: tiết diện ngang của môi trường truyền nhiệt

$$R_T = \frac{\theta}{H}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phần tử nhiệt:

- Nhiệt dung: $C_T = cM$

Trong đó: c: nhiệt dung riêng của môi trường truyền nhiệt

M: khối lượng của môi trường truyền nhiệt

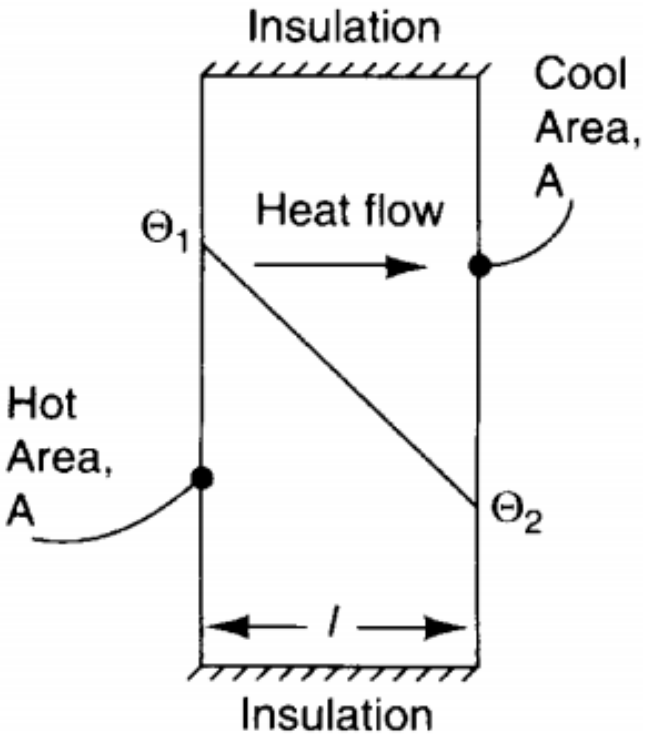
$$C_T = \frac{Q}{\theta} \qquad \theta = \frac{1}{C_T}\int Hdt$$

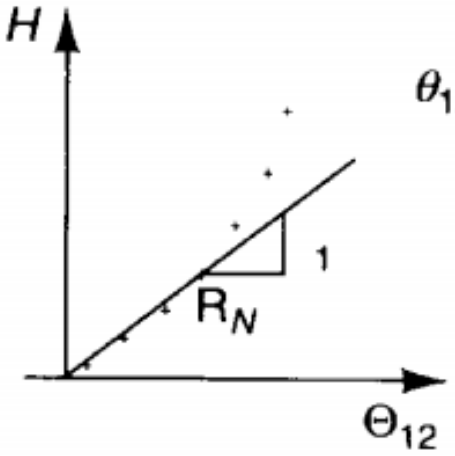
- Quán tính nhiệt: I_T

$$\theta = I_T \frac{dH}{dt}$$

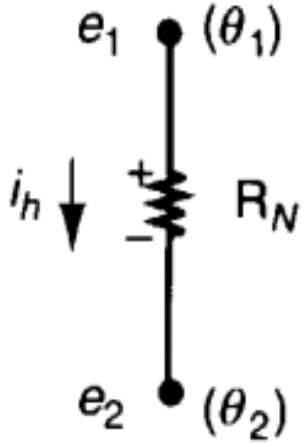
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Nhiệt trở truyền nhiệt:



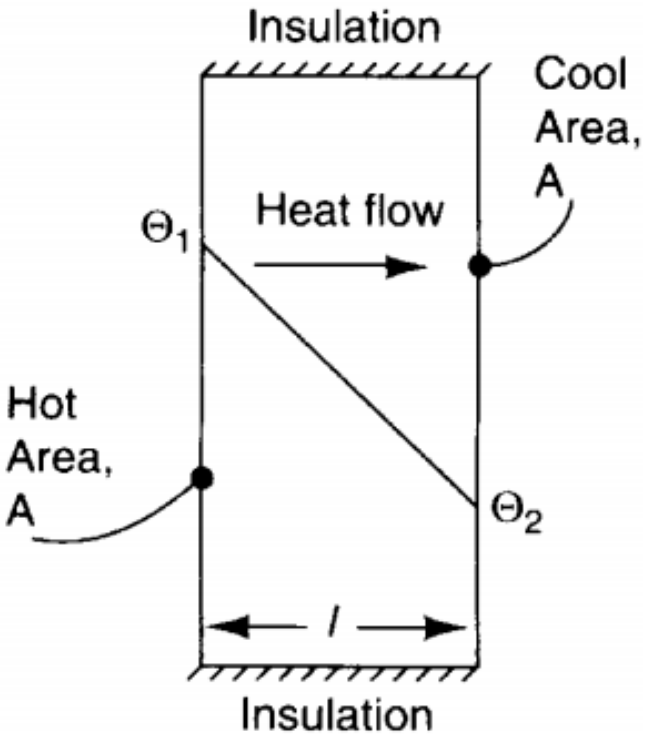


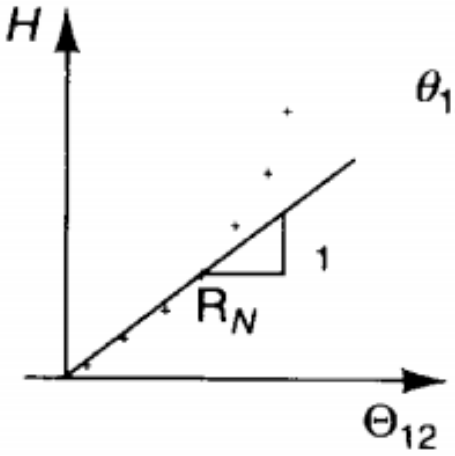
$\theta_{12} = R_N h$



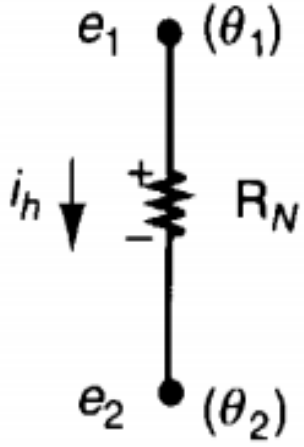
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Nhiệt trở truyền nhiệt:



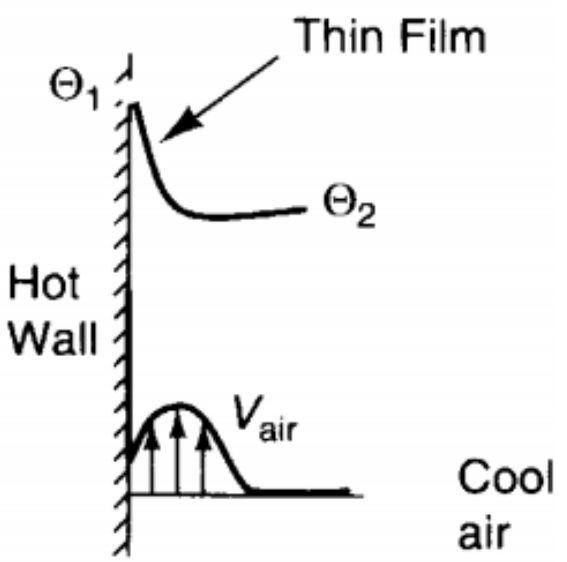


$\theta_{12} = R_N h$

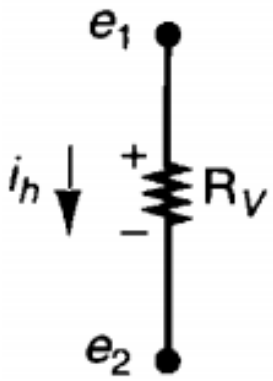


CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Nhiệt trở đối lưu:

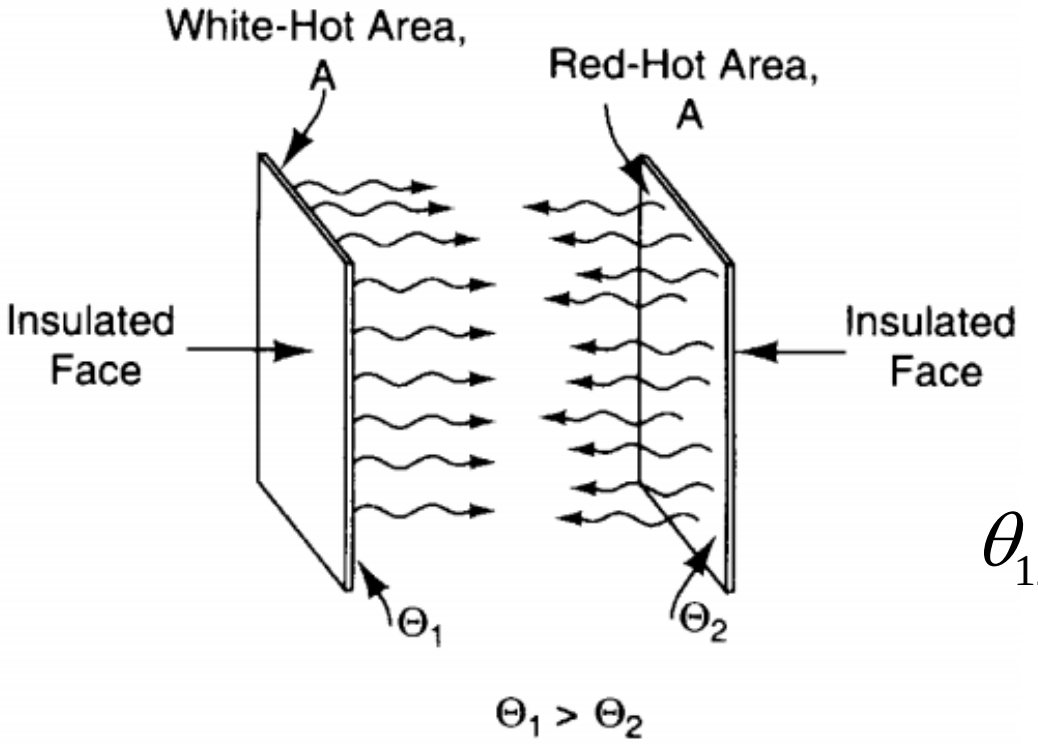


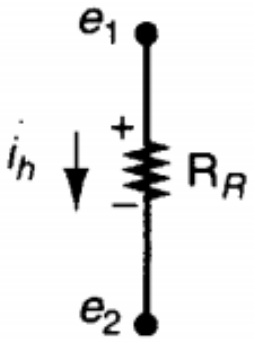
$$\theta_{12} = R_V h$$



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Nhiệt trở bức xạ:





$$\theta_{12} = R_R h$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.3.5 Phân tích vật lý hệ lưu chất lỏng

a. Các phần tử lưu chất

Các biến trong hệ lưu chất :

- Áp suất: p [N/m2]
- Thể tích: V [m3]
- Lưu lượng: q [m3/sec]

$$q = \frac{dV}{dt}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các phần tử hệ lưu chất :

- Lưu trở:

Lưu trở của đường ống:

$$R_L = \frac{128\mu l}{\pi d^4} \quad \text{[N.sec/m]}$$

Lưu trở đường ống còn tính theo:

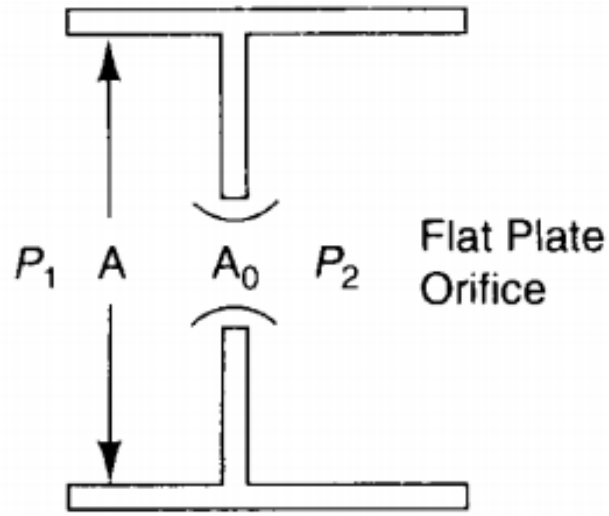
$$R_L = \frac{p}{q}$$

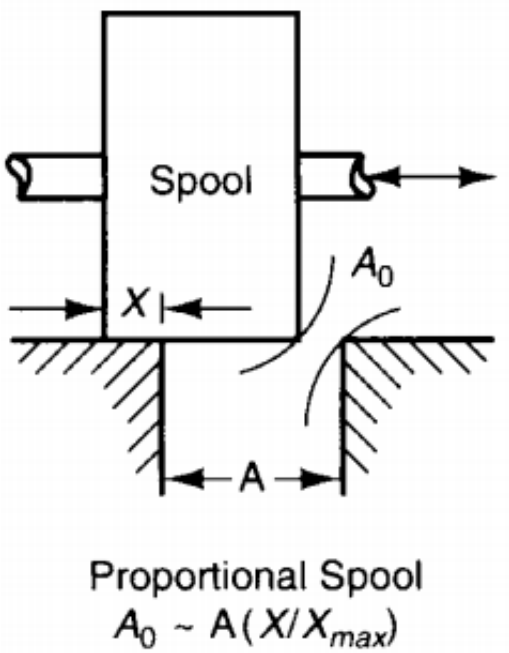
Công thức trên chỉ đúng trong trường hợp lưu chất chảy tầng (có hướng), và đường ống dẫn lưu chất dài (l > 20d)

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

- Lưu trở:

Lưu trở của van: phi tuyến

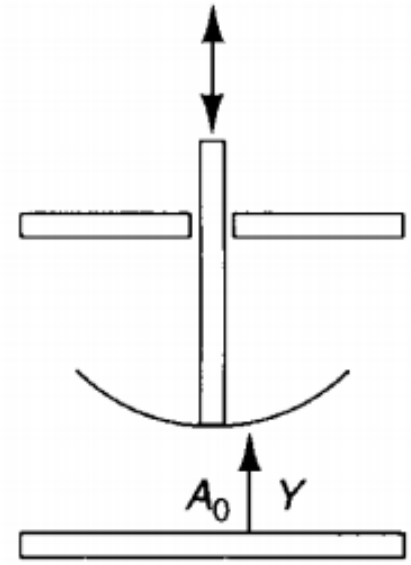




CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

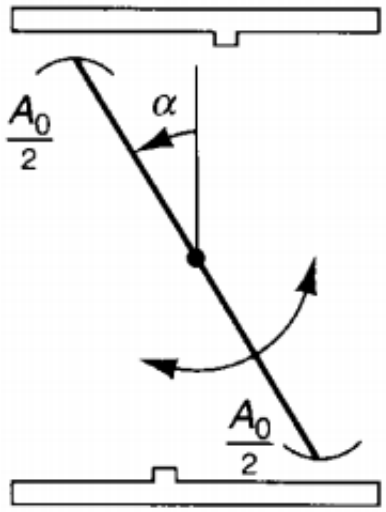
- Lưu trở:

Lưu trở của van: phi tuyến



Gate

$A_0 \sim A(y/y_{max})$



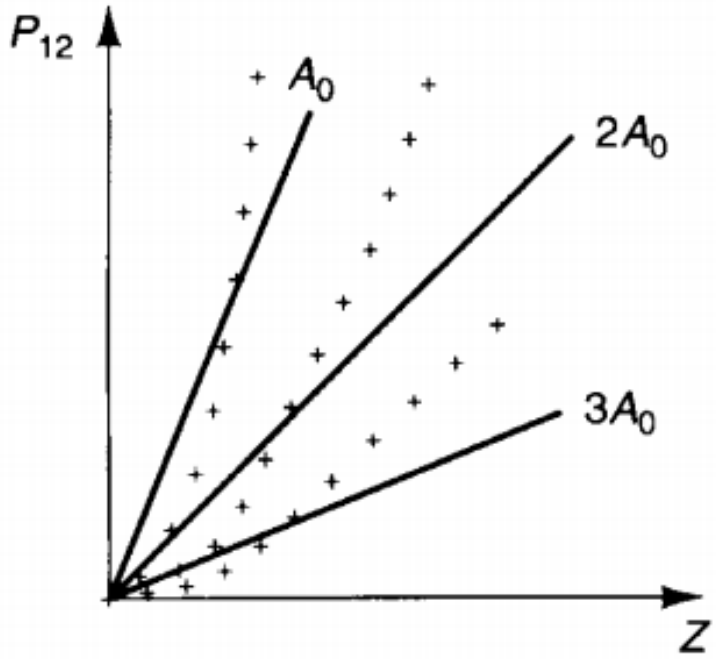
Butterfly

$A_0 \sim A(1 - \cos\alpha)$

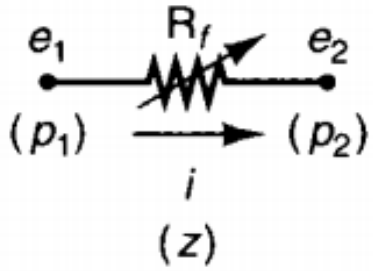
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

- Lưu trở:

Lưu trở của van: phi tuyến



$$p_{12} = R_f z$$



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

- Dung:

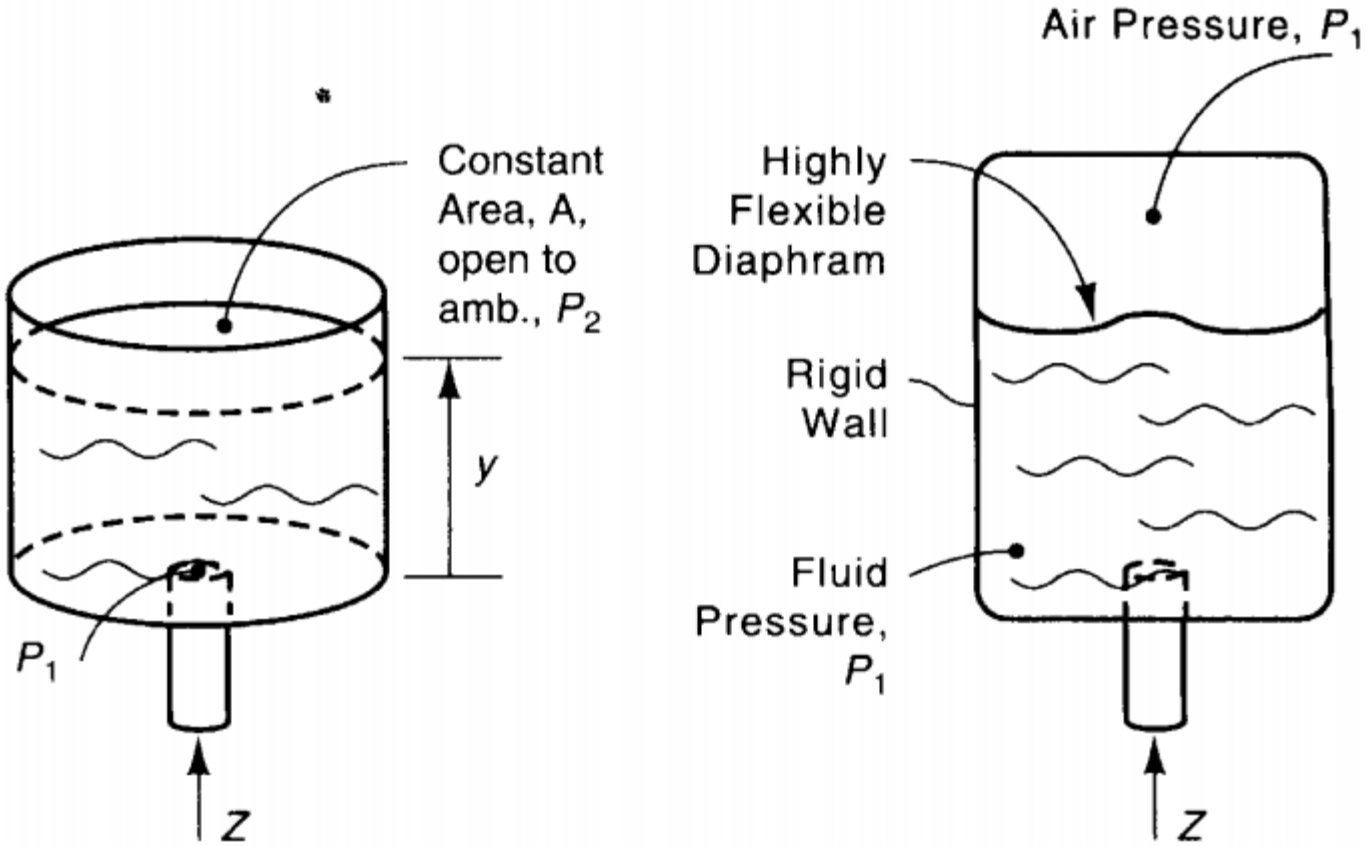
$$C_L = \frac{A}{pg}$$

$$C_L = \frac{V}{p}$$

$$p = \frac{1}{C_L}\int q dt$$

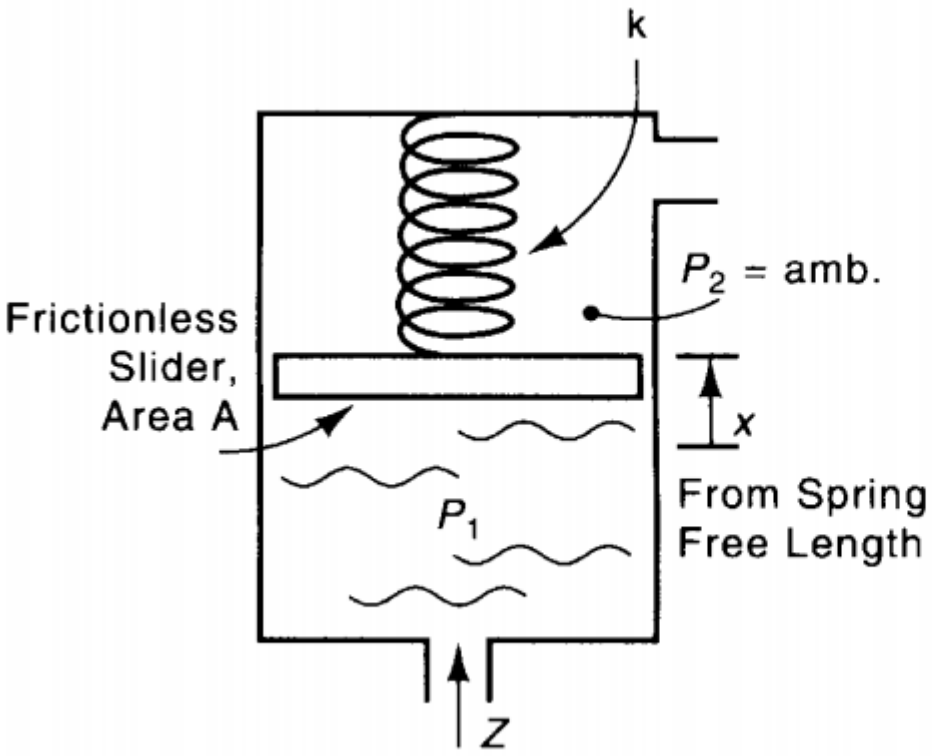
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

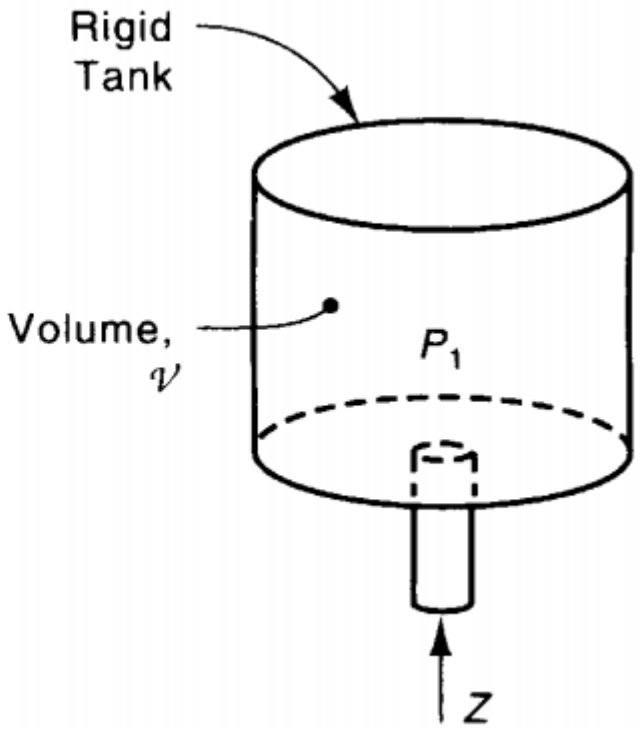
- Dung:



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

- Dung:





CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

- Quán tính:

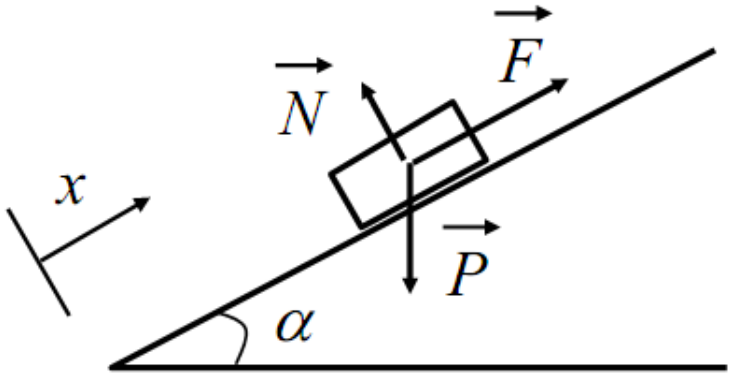
$$I_L = \frac{\rho l}{a}$$

$$p = I_L \frac{dq}{dt}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.3.6 Một số ví dụ:

Ví dụ 2.5: Mô hình hóa hệ thống sau:



Cách 1: Dùng định luật Newton

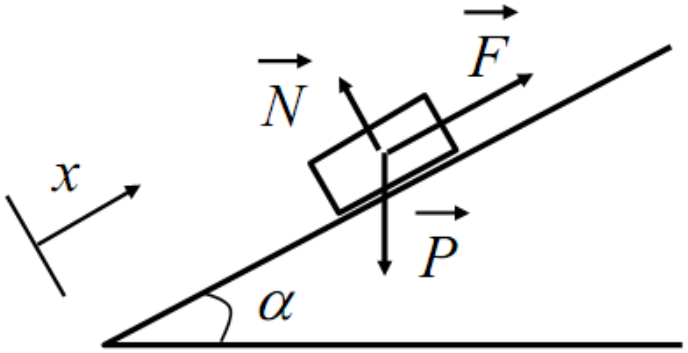
Chiếu lên phương chuyển động,

áp dụng định luật II Newton:

$$m\ddot{x}(t) = F(t) - P\sin\alpha$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Cách 2: Dùng công thức Euler–Lagrange:



Động năng: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

Thế năng: $U = mgx\sin\alpha$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx\sin\alpha$$

Áp dụng công thức Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F \rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + mg\sin\alpha = F$$

$$m\ddot{x} + mg\sin\alpha = F$$

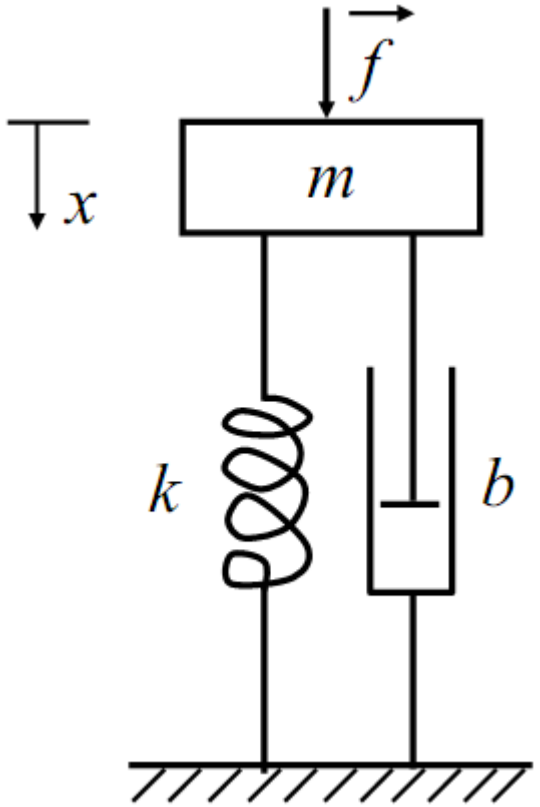
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.6: Mô hình hóa hệ thống giảm sốc của xe máy :

Cách 1: Dùng định luật Newton

$$m\ddot{x}(t) = f(t) - kx(t) - b\dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

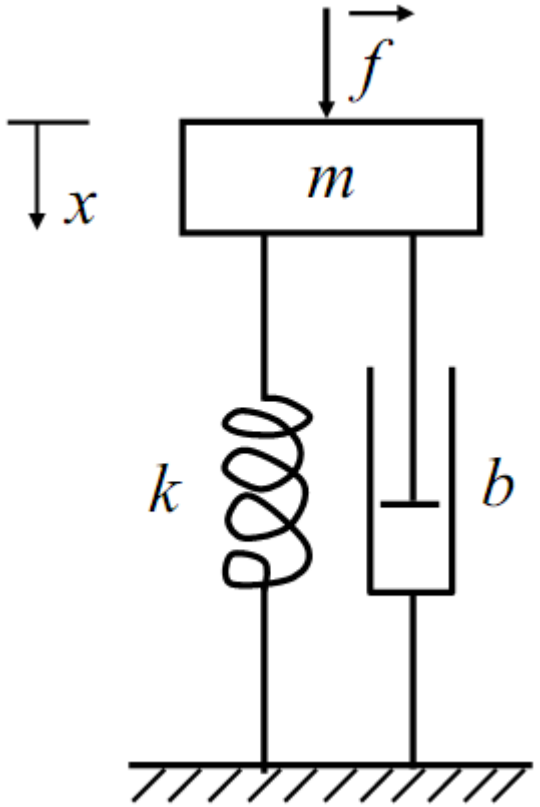


CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Cách 2: Áp dụng công thức Euler-Lagrange:

Động năng: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

Thế năng: $U = \frac{1}{2} kx^2$



$$L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = f - b\dot{x}$$

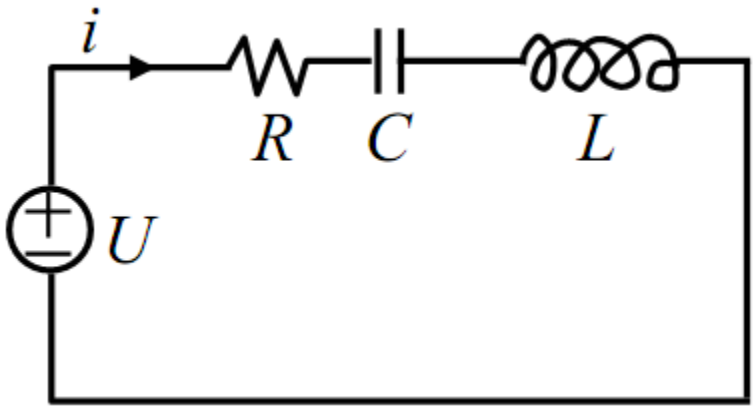
$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = f - b\dot{x}$$

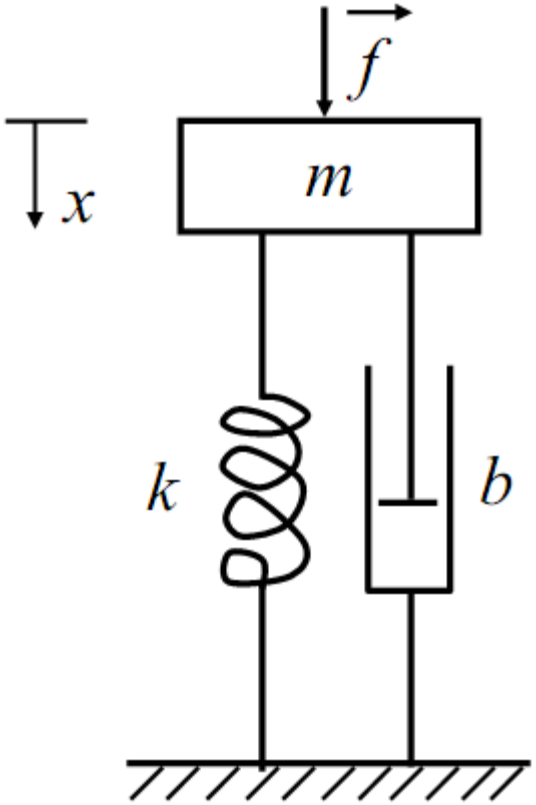
$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Cách 3: Áp dụng sự tương đồng giữa hệ thống điện và hệ thống cơ:

Thế:	f ↔ U
Lượng:	x ↔ q
Dung:	1/k ↔ C
Trở:	b ↔ R
Cảm:	m ↔ L





CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Cách 3: Áp dụng sự tương đồng giữa hệ thống điện và hệ thống cơ:

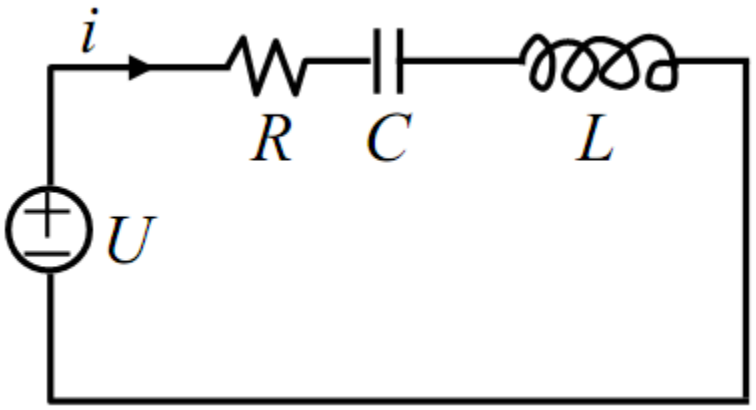
Quan hệ giữa dòng và áp của mạch điện tương:

$$I(s)\left(R+\frac{1}{Cs}+Ls\right)=U(s)$$

$$\frac{I(s)}{s}\left(Rs+\frac{1}{C}+Ls^2\right)=U(s)$$

$$Q(s)\left(Rs+\frac{1}{C}+Ls^2\right)=U(s)$$

$$\rightarrow L\ddot{q}(t)+R\dot{q}(t)+\frac{1}{C}q(t)=u(t)$$



$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.7: Mô hình hóa hệ con lắc ngược

Trong đó:

M : trọng lượng xe [Kg]

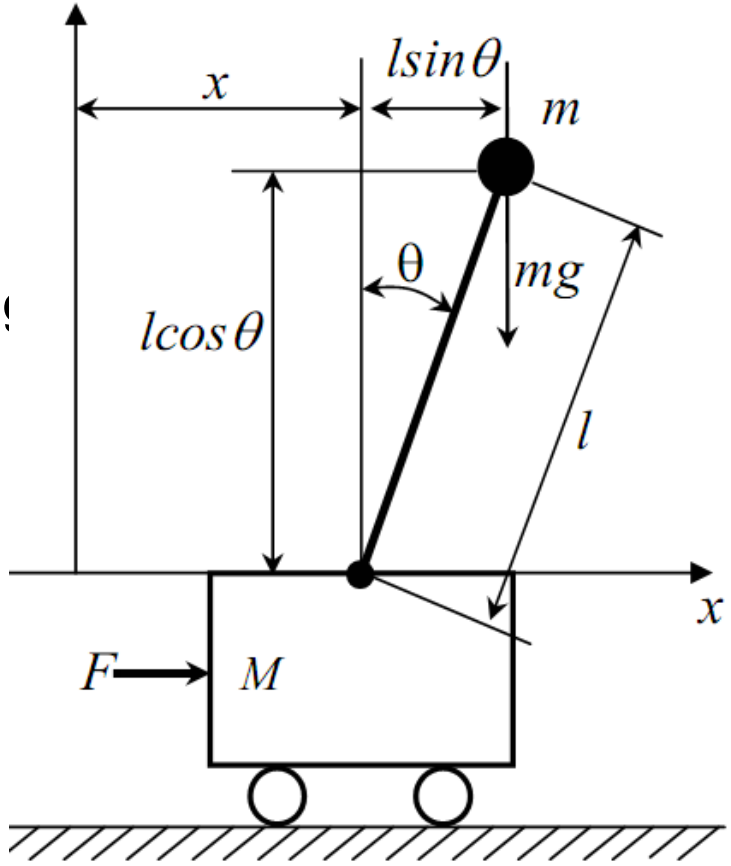
m : trọng lượng con lắc [Kg]

l : chiều dài con lắc [m] u : lực tác động

g : gia tốc trọng trường [m/s2]

x : vị trí xe [m]

θ : góc giữa con lắc và phương thẳng đứng [rad]



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Cách 1: Dùng định luật Newton

Gọi (x_P, y_P) là tọa độ của vật nặng m ở đầu con lắc, ta có:

$$x_P = x + l\sin\theta$$

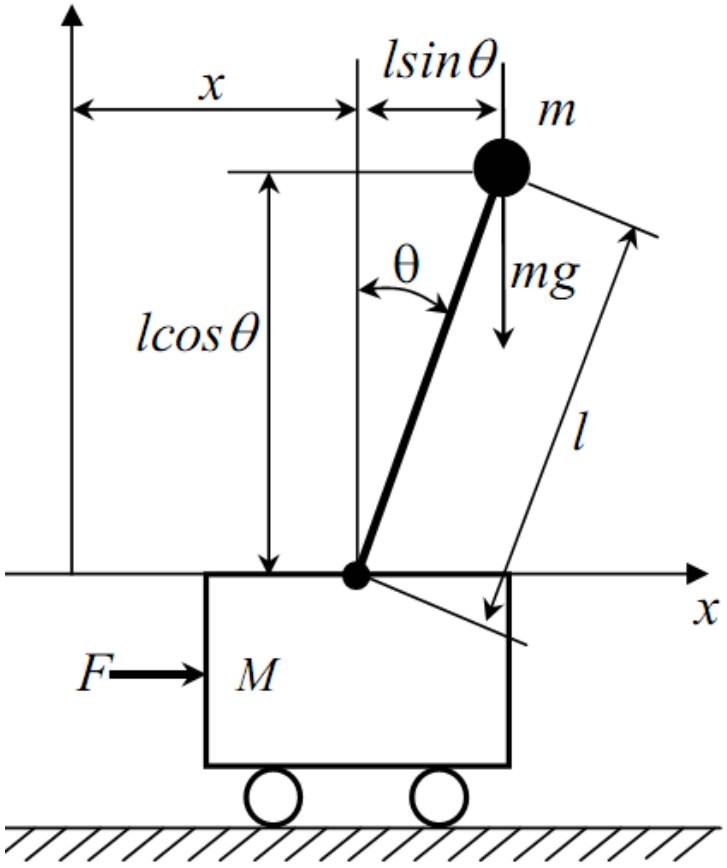
$$y_P = l\cos\theta$$

Áp dụng định luật II Newton cho chuyển động theo phương x, ta có:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2x_P}{dt^2} = F$$

Thay x_P vào:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) = F$$



CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Triển khai đạo hàm:

$$(M+m)\ddot{x} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} = F$$

Áp dụng định luật II Newton cho chuyển động quay của con lắc quanh trục ta được:

$$m\frac{d^2x_P}{dt^2}l\cos\theta - m\frac{d^2y_P}{dt^2}l\sin\theta = mgl\sin\theta$$

Thay x_P và y_P vào:

$$\left[m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta)\right]l\cos\theta - \left[m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos\theta)\right]l\sin\theta = mgl\sin\theta$$

Khai triển các đạo hàm và rút gọn ta được:

$$m\ddot{x}\cos\theta - ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Kết hợp hai phương trình:

$$(M+m)\ddot{x} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} = F$$

$$m\ddot{x}\cos\theta - ml\ddot{\theta} = mg\sin\theta$$

Ta được:

$$\ddot{x} = \frac{F + ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m(\cos\theta)^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F\cos\theta - (M+m)g(\sin\theta) + ml(\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta}^2}{ml(\cos\theta)^2 - (M+m)l}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Cách 2: Dùng công thức Euler–Lagrange

Gọi (x_P, y_P) là tọa độ của vật nặng m ở đầu con lắc, ta có:

$$x_P = x + l\sin\theta$$

$$y_P = l\cos\theta$$

Động năng của vật nặng đầu con lắc:

$$T_P = \frac{1}{2}\dot{x}_P^2 + \frac{1}{2}\dot{y}_P^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}m(-l\dot{\theta}\sin\theta)^2$$

$$\rightarrow T_P = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Động năng của xe:

$$T_C = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Động năng của hệ thống:

$$T = T_C + T_P = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Thế năng của hệ thống chính là thế năng vật nặng đầu con lắc:

$$U = mgl\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

Phương trình Euler – Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Phương trình Euler – Lagrange:

$$(M+m)\ddot{x} + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 = F$$

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = 0$$

Suy ra:

$$\ddot{x} = \frac{F + ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m(\cos\theta)^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F\cos\theta - (M+m)g(\sin\theta) + ml(\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta}^2}{ml(\cos\theta)^2 - (M+m)l}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.8: Mô hình hệ tay máy hai bậc tự do

l_1, l_2 : chiều dài của 2 cánh tay

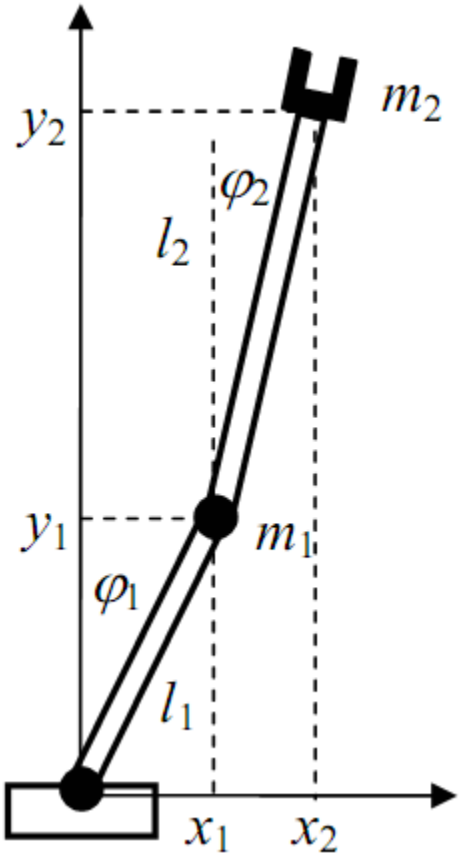
m_1, m_2 : khối lượng

φ_1, φ_2 : góc quay của các khớp cánh tay

τ_1, τ_2 : moment làm quay các khớp nối

Tọa độ của cánh tay máy trong hệ tọa độ De-cac:

$$x_1 = -l_1 \sin\varphi_1$$
$$y_1 = l_1 \cos\varphi_1$$
$$x_2 = -l_1 \sin\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2$$
$$y_2 = -l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2$$

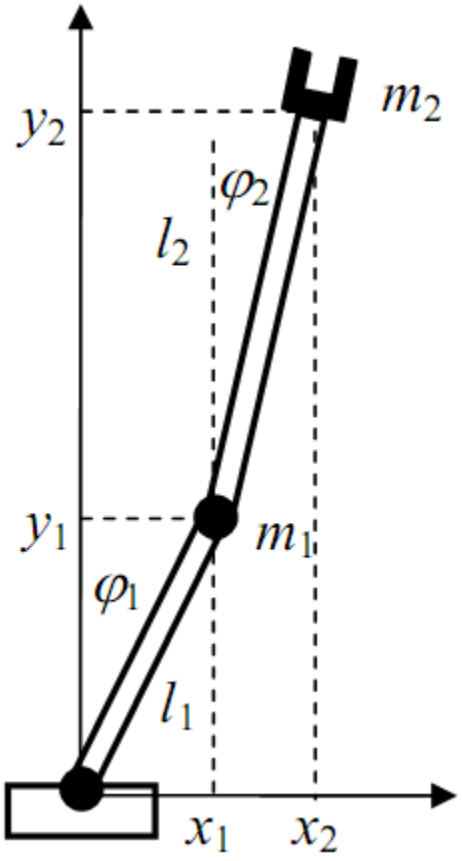


CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Vận tốc :

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 \\ -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 \\ -l_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2 \end{bmatrix}$$



Động năng:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Thế năng:

$$U = m_1 g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)$$

$$- m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Phương trình Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \tau_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \tau_2$$

Thay vào

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \ddot{\varphi}_2$$
$$+ m_2 l_1 l_2 (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin\varphi_1 = \tau_1$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \ddot{\varphi}_1$$
$$- m_2 l_1 l_2 (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 - m_2 g l_2 \sin\varphi_2 = \tau_2$$

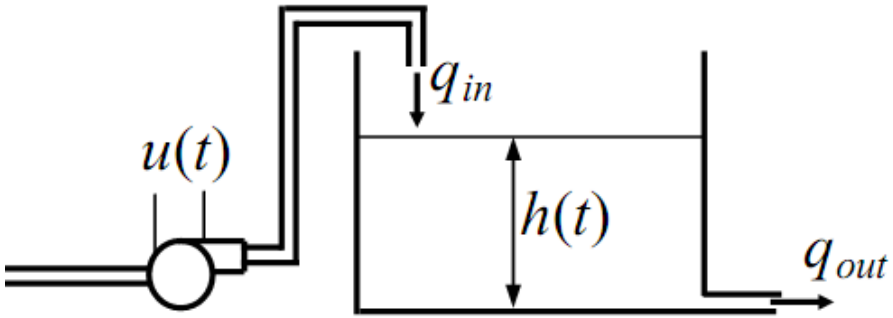
CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.9: Mô hình toán bồn chứa chất lỏng (Single Tank)

A: tiết diện ngang bồn chứa

a: tiết diện van xả

k: hệ số tỉ lệ với công suất máy bơm



Phương trình cân bằng:

$$\frac{d}{dt}(Ah(t)) = q_{in}(t) - q_{out}(t)$$

Dòng vào: $q_{in}(t) = k.u(t)$

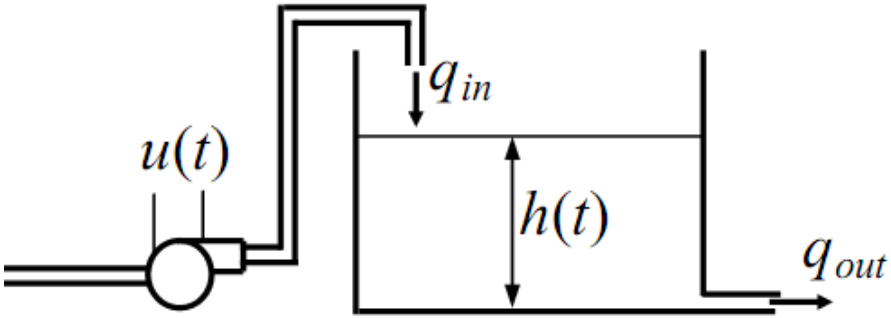
Dòng ra: $q_{out}^2(t) = (2/\rho)a^2 C_D^2 p(t)$

Trong đó: $p(t) = \rho g h(t)$: áp suất

$C_D = 0,6$: hệ số xả

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.9: Mô hình toán bồn chứa chất lỏng (Single Tank)

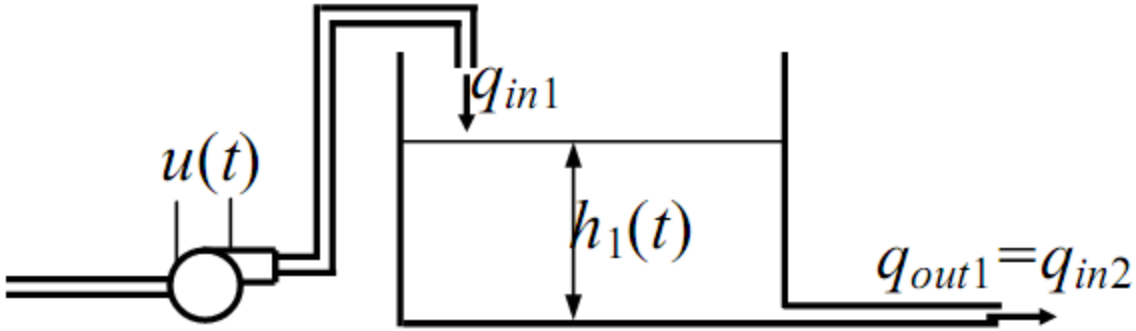


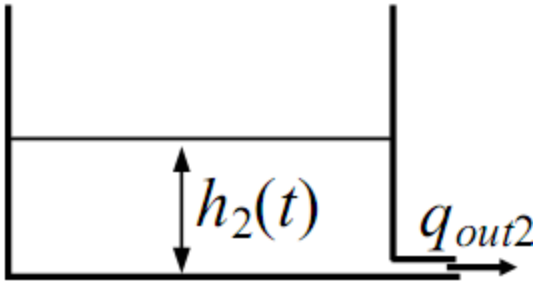
Phương trình cân bằng:

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}(k.u(t) - aC_D\sqrt{2gh(t)})$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.10: Mô hình toán hệ bồn nối tiếp (Cascade Tank)





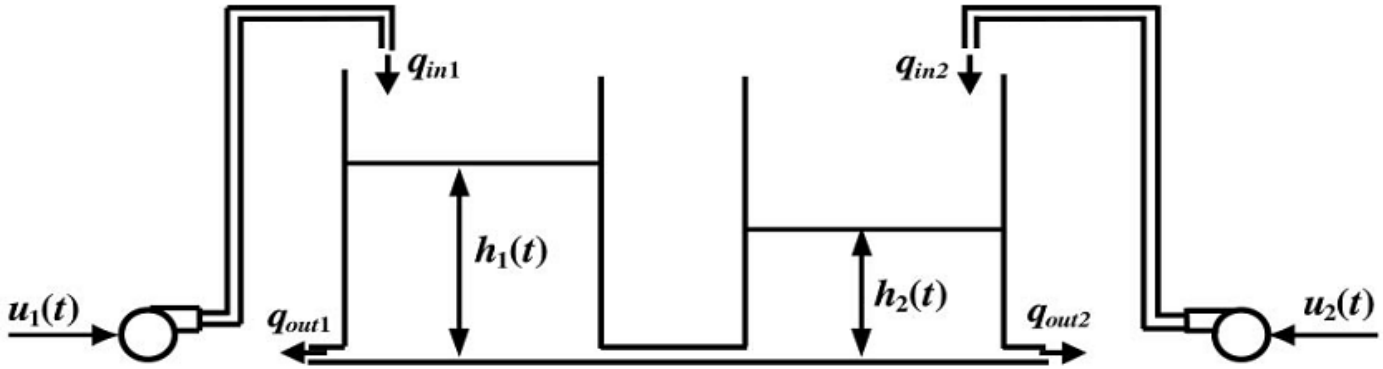
Phương trình cân bằng:

$$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{A_1}(k_1.u_1(t) - a_1 C_{D1}\sqrt{2gh_1(t)})$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{1}{A_2}(a_1 C_{D1}\sqrt{2gh_1(t)} - a_2 C_{D2}\sqrt{2gh_2(t)})$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.11: Mô hình toán hệ bồn liên kết (Coupled Tank)



Phương trình cân bằng:

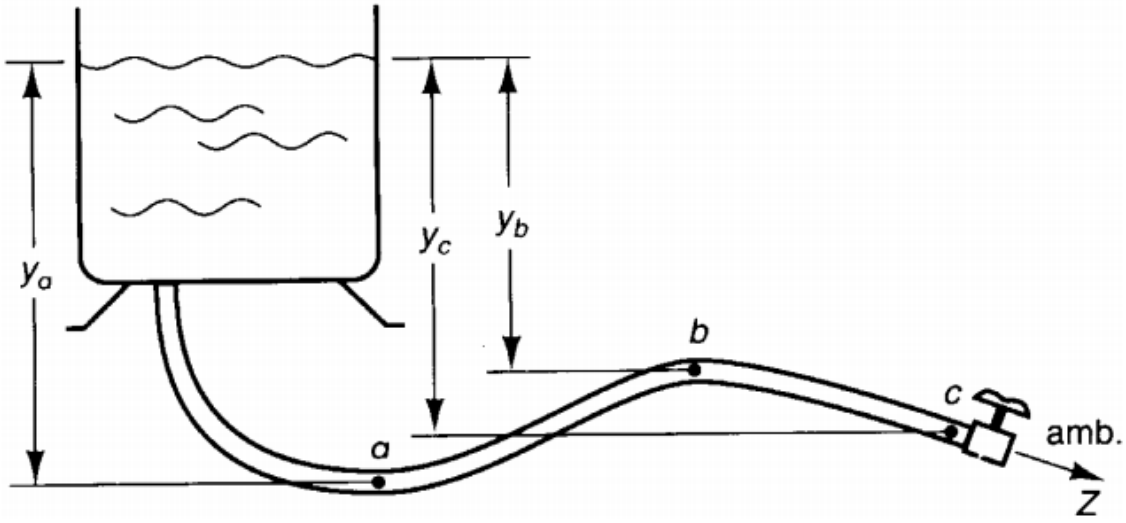
$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A_1}(k_1.u_1 - a_1 C_{D1}\sqrt{2gh_1} - C_{D12}\,\mathrm{sgn}(h_1 - h_2)a_{12}\sqrt{2g\,|h_1 - h_2|})$$

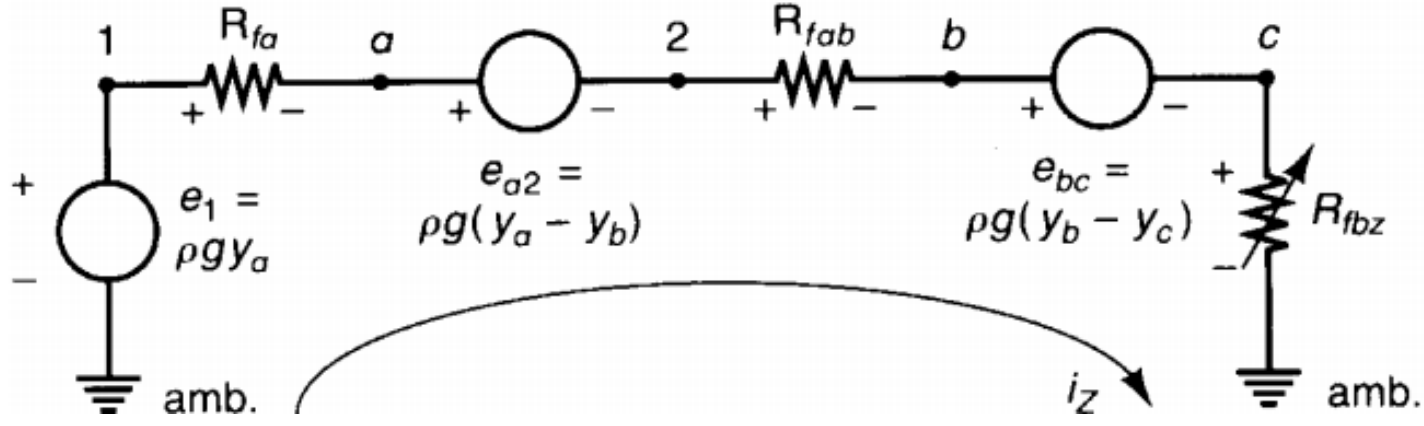
$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A_2}(k_2.u_2 - a_2 C_{D2}\sqrt{2gh_2} - C_{D12}\,\mathrm{sgn}(h_2 - h_1)a_{12}\sqrt{2g\,|h_1 - h_2|})$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.12: Sự tương đồng giữa hệ lưu chất và hệ thống điện:

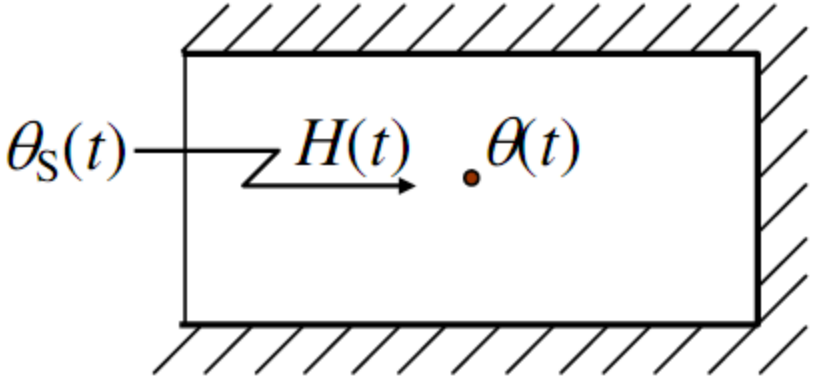
Để 2 mô hình trên tương đương ta cần giả thiết bồn chứa rất lớn, khi hệ thống vận hành độ cao mực chất lỏng trong bồn chứa thay đổi không đáng kể.





CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.13: Mô hình toán lò sấy



θ_s (t) : nhiệt độ nguồn nhiệt

θ (t) : nhiệt độ lò sấy

H (t) : dòng nhiệt

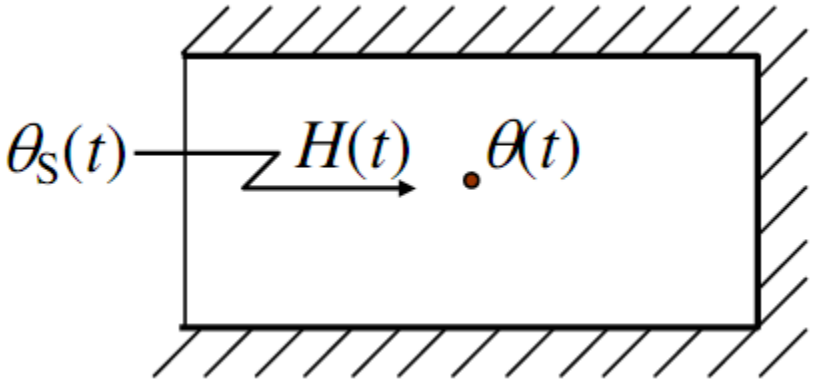
Dòng nhiệt $$H(t) = \frac{\theta_S(t) - \theta(t)}{R_T}$$

Phương trình cân bằng:

$$C_T \frac{d\theta(t)}{dt} = H(t)$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Nhiệt trở $$R_T = \frac{d}{2Ak}$$



d: chiều dài lò sấy

A: tiết diện ngang

k: hệ số dẫn nhiệt

C_T = cM : nhiệt dung

c: nhiệt dung riêng của môi trường truyền nhiệt

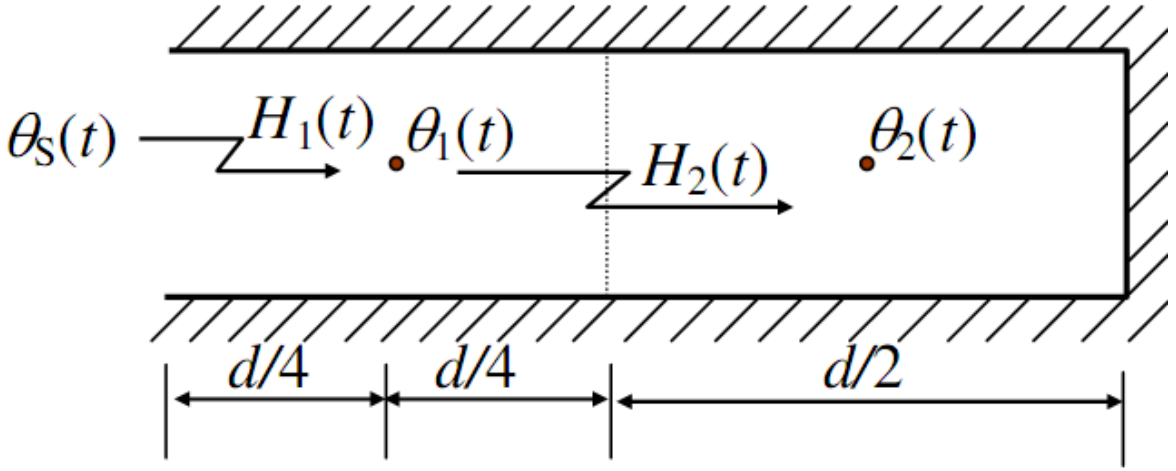
M: khối lượng môi trường truyền nhiệt

Mô hình toán của lò sấy

$$R_T C_T \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = \theta_S(t)$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Trường hợp lò sấy dài, có thể mô hình hóa bằng cách chia làm nhiều ngăn:



Dòng nhiệt:

$$H_1(t) = \frac{\theta_S(t) - \theta_1(t)}{R_{T1}}$$

$$H_2(t) = \frac{\theta_1(t) - \theta_2(t)}{R_{T2}}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Trường hợp lò sấy dài, có thể mô hình hóa bằng cách chia làm nhiều ngăn:

Phương trình cân bằng: $$C_{T1}\frac{d\theta_1(t)}{dt} = H_1(t) - H_2(t)$$

$$C_{T2}\frac{d\theta_2(t)}{dt} = H_2(t)$$

Mô hình toán hệ thống

$$C_{T1}\frac{d\theta_1(t)}{dt} = \frac{\theta_S(t) - \theta_1(t)}{R_{T1}} - \frac{\theta_1(t) - \theta_2(t)}{R_{T2}}$$

$$C_{T2}\frac{d\theta_2(t)}{dt} = \frac{\theta_1(t) - \theta_2(t)}{R_{T2}}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

2.4 PHÂN TÍCH TOÁN HỌC

• Kết hợp tất cả các hệ phương trình mô tả đặc tính động của các bộ phận chức năng để được hệ phương trình mô tả hệ thống.

• Tuyến tính hóa quan hệ phi tuyến để được mô tả toán học tuyến tính

Xét hệ phi tuyến bậc n có p ngõ vào, q ngõ ra mô tả bởi phương trình trạng thái.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases}$$

trong đó:

$x(t) \in \Re^n$ là vector trạng thái,

$u(t) \in \Re^p$ là vector tín hiệu vào,

$y(t) \in \Re^q$ là vector tín hiệu ra;

$f(.) \in \Re^n, h(.) \in \Re^q$ là vector hàm mô tả đặc tính động của hệ phi tuyến.

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Khai triển Taylor xung quanh điểm làm việc tĩnh $(\bar{x}, \bar{u})$, ta có thể mô tả hệ thống bằng phương trình trạng thái tuyến tính:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \mathbf{A}\tilde{x}(t) + \mathbf{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \mathbf{C}\tilde{x}(t) + \mathbf{D}\tilde{u}(t) \end{cases}$$

Trong đó:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}$$

$$\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y} \qquad (\bar{y} = h(\bar{x}, \bar{u}))$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các ma trận trạng thái của hệ tuyến tính gần đúng được tính như sau:

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các ma trận trạng thái của hệ tuyến tính gần đúng được tính như sau:

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các ma trận trạng thái của hệ tuyến tính gần đúng được tính như sau:

$$C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1} & \frac{\partial h_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Các ma trận trạng thái của hệ tuyến tính gần đúng được tính như sau:

$$D = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial u_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial u_1} & \frac{\partial h_q}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{(\bar{x},\bar{u})}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Kết hợp các khối trog mô tả toán học hệ thống:

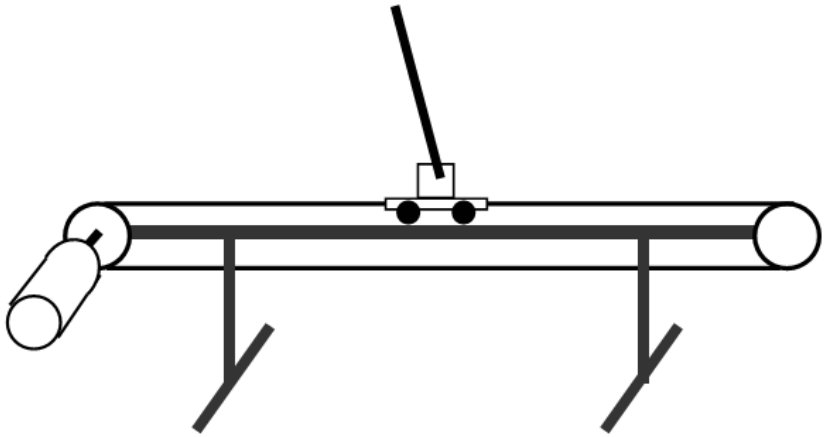
• Phương pháp đại số sơ đồ khối – Phương pháp sơ đồ dòng tín hiệu và công thức Mason để tìm hàm truyền tương đương của hệ tuyến tính.

• Đánh giá sự phù hợp của mô hình

• Dùng mô hình để dự báo đáp ứng của hệ thống đối với tín hiệu vào cho trước.

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.14: Mô hình toán hệ con lắc ngược truyền động dùng động cơ DC, xét ảnh hưởng của ma sát:



Đặc tính động của hệ xe–con lắc có xét đến ảnh hưởng của ma sát:

Thực hiện Tương tự như thí dụ 2.7, tuy nhiên lực tác động phải kể thêm lực ma sát:

$$(M+m)\ddot{x} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} = F - f_C$$

$$m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = -f_P$$

Trong đó: f_C - lực ma sát tác động lên xe

f_P - lực ma sát tác động lên con lắc

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

* Đặc tính ma sát:

Giả thiết có cả ma sát tĩnh và ma sát nhớt tác động làm cản trở chuyển động của xe và con lắc. Các lực ma sát này có thể mô tả bằng các phương trình sau:

$$f_C = \mathrm{sgn}(\dot{x}) A_x e^{-C_x|\dot{x}|} + B_x |\dot{x}|$$

$$f_P = \mathrm{sgn}(\dot{\theta}) A_\theta e^{-C_\theta|\dot{\theta}|} + B_\theta |\dot{\theta}|$$

Trong đó: A_x, B_x, C_x, A_θ, B_θ, $C_\theta > 0$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

* Đặc tính động cơ

$$L_a \frac{dI_a}{dt} = V_a - R_a I_a - E_b;$$

$$E_b = K_b \omega; \quad \omega = \frac{K_g}{r} \frac{dx}{dt}$$

Trong đó:

L_a : điện cảm phần ứng

R_a : điện trở phần ứng

I_a : dòng điện phần ứng

V_a : điện áp phần ứng

E_b : sức phản điện (sđđ phần ứng)

K_b : Hệ số tốc độ động cơ

ω : tốc độ quay động cơ

r : bán kính puli

K_g : hệ số giảm tốc độ

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

* Đặc tính động cơ

$$J\frac{d\omega}{dt} = T_m - T_l - B_m\omega$$

$$T_m = K_i K_g I_a;\ T_l = F.r$$

Trong đó:

J_m : moment quán tính động cơ

T_m : moment động cơ

B_m : hệ số ma sát

K_g : hệ số giảm tốc độ

I_a : dòng điện phần ứng

ω : tốc độ quay động cơ

T_l : mô men tải

K_i : hệ số mô men

r : bán kính puli

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

* Hệ phương trình động học của động cơ

$$
\left.
\begin{aligned}
L_a \frac{di_a}{dt} &= v_a - R_a i_a - e_b \\
e_b &= K_b \omega \\
\omega &= \frac{K_g}{r}\frac{dx}{dt} \\
J \frac{d\omega}{dt} &= T_m - T_l - B_m \omega \\
T_m &= K_i K_g i_a \\
T_l &= F.r
\end{aligned}
\right\}
\begin{aligned}
& L_a \dot{I}_a + R_a I_a + \frac{K_b K_g}{r}\dot{x} = V_a \\
& \frac{K_g J_m}{r^2}\ddot{x} + \frac{K_g B_m}{r^2}\dot{x} - \frac{K_i K_g}{r} I_a = -F
\end{aligned}
$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

* Đặc tính động cơ có thể biểu diễn theo I_a , x và F như sau:

$$\begin{cases} L_a \dot{I}_a + R_a I_a + \dfrac{K_b K_g}{r} \dot{x} = V_a \\ \dfrac{K_g J_m}{r^2} \ddot{x} + \dfrac{K_g B_m}{r^2} \dot{x} - \dfrac{K_i K_g}{r} I_a = -F \end{cases}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Do đó mô hình toán học của hệ xe con lắc với tín hiệu vào là điện áp cấp cho động cơ như sau:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} = F - f_C \\ m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = -f_P \\ L_a\dot{I}_a + R_aI_a + \dfrac{K_bK_g}{r}\dot{x} = V_a \\ \dfrac{K_gJ_m}{r^2}\ddot{x} + \dfrac{K_gB_m}{r^2}\dot{x} - \dfrac{K_iK_g}{r}I_a = -F \end{cases}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Do đó mô hình toán học của hệ xe con lắc với tín hiệu vào là điện áp cấp cho động cơ như sau:

$$\begin{cases} (M + m + \dfrac{K_g J_m}{r^2})\ddot{x} - ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 + ml(\cos\theta)\ddot{\theta} + \\ + \dfrac{K_g B_m}{r^2}\dot{x} - \dfrac{K_i K_g}{r} I_a = -f_C \\ m\ddot{x}\cos\theta + ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = -f_P \\ L_a\dot{I}_a + R_a I_a + \dfrac{K_b K_g}{r}\dot{x} = V_a \end{cases}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Ví dụ 2.15: Xây dựng mô hình tuyến tính của hệ con lắc ngược xung quanh vị trí thẳng đứng.

Hệ phương trình mô tả đặc tính động phi tuyến của hệ con lắc ngược (xem ví dụ 2.7) với biến đầu vào là lực tác động vào hệ thống:

Véc tơ tín hiệu vào $u(t) \in \Re^p = \Re^1$

Véc tơ tín hiệu ra: $y(t) \in \Re^q = \Re^2$ (là tín hiệu có thể ghi nhận được bằng sensor: tốc độ xe và góc nghiêng θ).

$$\ddot{x} = \frac{u + ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m(\cos\theta)^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u\cos\theta - (M+m)g(\sin\theta) + ml(\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta}^2}{ml(\cos\theta)^2 - (M+m)l}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Đặt biến trạng thái: $x(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x}]^T$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dfrac{u\cos x_1 - (M+m)g(\sin x_1) + ml(\cos x_1 \sin x_1)x_2^2}{ml(\cos x_1)^2 - (M+m)l} \\ x_4 \\ \dfrac{u + ml(\sin x_1)x_2^2 - mg\cos x_1 \sin x_1}{M + m - m(\cos x_1)^2} \end{bmatrix}}_{f(.)}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Biến tín hiệu ra: $y(t) = [y_1, y_2]^T = [\theta(t), x(t)]^T$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{h(.)}$$

Điểm cân bằng ở vị trí thẳng đứng: $(\bar{x}, \bar{u}) = (0,0)$

Tuyến tính hóa xung quanh điểm cân bằng:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \mathbf{A}\tilde{x}(t) + \mathbf{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \mathbf{C}\tilde{x}(t) + \mathbf{D}\tilde{u}(t) \end{cases}$$

Với các ma trận hệ số **A**, **B**, **C**, **D**

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Xác định các ma trận hệ số **A**, **B**, **C**, **D**

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Xác định các ma trận hệ số **A**, **B**, **C**, **D**

$$\mathbf{B} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1_4}{M} \end{bmatrix}$$

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH HÓA

Xác định các ma trận hệ số **A**, **B**, **C**, **D**

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_4} \end{array}\right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{(0,0)} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial h_1}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} \end{array}\right]_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(0,0)}$$