GỢI Ý MỘT SỐ NỘI DUNG ÔN TẬP
(Giải tích thực một biến K69)

1. Hàm số liên tục

   - Khái niệm hàm số liên tục đều

   - Tính chất hàm liên tục trên một đoạn

   - Thác triển liên tục. Ví dụ: $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ liên tục đều trên $(0, a]$ với mọi $a > 0$.

2. Phép tính vi phân

   - Định lí giá trị trung gian: Rolle, Lagrange, Cauchy: Phát biểu và điều kiện áp dụng. Ví dụ: $f(x) = \sqrt{|x|}$ liên tục trên đoạn $[-1, 2]$ nhưng không tồn tại đạo hàm $f'(0)$ và do đó $f'(x)$ không liên tục trên khoảng $(-1, 2)$. Kết luận: không áp dụng được định lí Lagrange trên đoạn $[-1, 2]$. Có tồn tại hay không một điểm $c \in (-1, 2)$ để $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{3}$?

   - Quy tắc Lh'opital: Điều kiện và vận dụng.

   - Khai triển Taylor, McLaurin tại một điểm.

3. Tích phân

   - Các lớp hàm khả tích cơ bản: Liên tục, đơn điệu, có hữu hạn điểm gián đoạn. Ví dụ: Hàm bậc thang $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x < 1 \\ 2 \text{ nếu x} = 1 \\ 3 \text{ nếu x} > 1 \end{cases}$ có một điểm gián đoạn $x = 1$ trên đoạn $[0, 2]$ nên khả tích trên đoạn $[0, 2]$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.

   - Ứng dụng tổng tích phân tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx.$$

   Ví dụ 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{17}} \sum_{k=1}^{n} k^{16} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{16} = \int_0^1 x^{16}dx = \frac{1}{17}$$

Ví dụ 2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k^2+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\frac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

Ví dụ 3: Cho hàm f không âm, liên tục trên đoạn $[0,1]$. Khi đó,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}=e^{\int_0^1\ln(1+f(x))dx}.$$

- Giới hạn qua dấu tích phân. Ví dụ: Với mọi hàm $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ (do đó bị chặn $|g(x)|\leq M_g$), ta có

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n|g(x)|dx\leq\lim_{n\to\infty}M_g\int_0^1 x^n dx=0.$$

- Tích phân suy rộng: Xét sự hội tụ, ví dụ

$$\int_0^\infty\frac{\arctan x dx}{\sqrt{e^x+1}},\qquad\int_0^\infty x^pe^{-qx}dx\ (\text{hàm gamma}),\qquad\int_0^1\frac{\sqrt{\sin x}dx}{e^x-1}.$$

4. Chuỗi số

- Xét sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối

- Khai triển Fourier hàm (thác triển) chẵn (cosine) và lẻ (sine). Ví dụ $f(x)=x$, $x\in[0,\pi]$, được thác triển tuần hoàn (chu kì 2π) thành hàm lẻ $f^*(x)=x$ với $x\in[-\pi,\pi]$. Khi đó (hệ số Fourier $a_n=0, b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx$),

$$x=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k},\quad x\in[0,\pi).$$

Hàm $f(x)=x$, $x\in[0,\pi]$, có thể thác triển thành hàm chẵn $g^*(x)=|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$. Khi đó, hệ số Fourier $b_n=0, a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx$, và ta có

$$x=\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$